第５回定期考査（整数の性質）Ｈ２９．３．６

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

1 645□ が 9 の倍数であるとき，□に入る数 (0 ～ 9) をすべて求めよ。

2 4 桁の自然数 257□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

3 $\sqrt{360n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

4 80の正の約数の個数を求めよ。

5 45 と 126の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

6 次の 2 つの整数が互いに素であるかどうかを答えよ。(1)　9 と 13　　(2)　18 と 24

7 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。　$a=-32$，$b=7$

8 a，b は整数とする。a を 9 で割ると 1 余り，b を 9 で割ると 5 余る。次の数を 9 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　　(2)　ab

9 4^{100} を 7 で割った余りを求めよ。

10 568 と 213の最大公約数を互除法を用いて求めよ。

11 次の方程式の整数解をすべて求めよ。　$30x+17y=2$

12 5 で割ると 2 余り，14 で割ると 5 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。

$\boxed{13}$ 次の分数を小数で表せ。循環小数は，$0.\dot{3}$ のような表し方で書け。$\dfrac{17}{6}$

$\boxed{14}$ 次の分数を小数で表したとき，[　]内の数字を求めよ。　$\dfrac{7}{13}$　[小数第 200 位]

$\boxed{15}$ 次の数を 10 進法で表せ。　(1)　$111_{(2)}$　(2)　$10202_{(3)}$

$\boxed{16}$ 10 進数 25 を2 進法で表せ。

$\boxed{17}$ $0.111_{(2)}$を 10 進法の小数で表せ。

$\boxed{18}$ 10 進数0.375を2 進法で表せ。

$\boxed{19}$ 次の数を [　] 内の表し方で表せ。　$1234_{(5)}$　[4 進法]

$\boxed{20}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$(x+4)(y+7)=13$

$\boxed{21}$ n が偶数のとき，n^2-2n は 8 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{22}$ n は整数とする。n^2+n+2 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

$\boxed{23}$ 2 次方程式 $x^2-mx+m-4=0$ が整数解を持つとき，整数 m の値を定めよ。

第５回定期考査（整数の性質）Ｈ２９．３．６　(③ずつ. 4点)　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 645□ が 9 の倍数であるとき，□に入る数 (0～9) をすべて求めよ。

解答　3　③

解説

□に入る数を a $(0 \leqq a \leqq 9)$ とする。

$6+4+5+a=a+15$ が 9 の倍数であるとき，この自然数は 9 の倍数になる。

$a+15$ が 9 の倍数になるのは，$a=3$ のときである。

よって，求める数は　3

2 4 桁の自然数 257□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

解答　2，6　(各2)　(違うものがあれば -2)

解説

□ に入る数を a $(0 \leqq a \leqq 9)$ とする。

下 2 桁が 4 の倍数であるとき，4 桁の自然数は 4 の倍数になる。

下 2 桁が 4 の倍数になるのは，$a=2$，6 のときである。

よって，求める数は　2，6

3 $\sqrt{360n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　$n=10$

解説

$\sqrt{360n}$ が自然数になるには，$360n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

360 を素因数分解すると　$360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$　②

360 に $2 \cdot 5$ を掛けると，$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ すなわち $(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2$ になる。

よって，求める自然数 n は　$n=2 \cdot 5=10$

4 80の正の約数の個数を求めよ。

解答　10 個　③

解説

80 を素因数分解すると　$80=2^4 \cdot 5$　1

よって，80 の正の約数の個数は

$(4+1)(1+1)=5 \cdot 2=10$ (個)

5 45 と 126の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

解答　最大公約数，最小公倍数の順に　9，630　(各2)

解説

45，126 を素因数分解すると

$45=3^2 \cdot 5$

$126=2 \cdot 3^2 \cdot 7$　2　(答えが出なければ 与える)

よって，最大公約数は　$3^2=9$

最小公倍数は　$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7=630$

6 次の 2 つの整数が互いに素であるかどうかを答えよ。(1)　9 と 13　(2)　18 と 24

解答　(1)　互いに素である　③　(2)　互いに素でない　③

解説

(1)　$9=3^2$，13 は素数であるから，9 と 13 の最大公約数は 1 である。

よって，9 と 13 は互いに素である。

(2)　$18=2 \cdot 3^2$，$24=2^3 \cdot 3$ であるから，18 と 24 の最大公約数は $2 \cdot 3=6$ である。

よって，18 と 24 は互いに素でない。

7 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。　$a=-32$，$b=7$

解答　商は -5，余りは 3　(各2)

解説

$-32=7 \cdot (-5)+3$ であるから

-32 を 7 で割ったときの商は -5，余りは 3

8 a，b は整数とする。a を 9 で割ると 1 余り，b を 9 で割ると 5 余る。次の数を 9 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　　(2)　ab

解答　(1)　6　(2)　5

解説

a，b は，整数 k，l を用いて

$a=9k+1$，　$b=9l+5$

と表される。

(1)　$a+b=(9k+1)+(9l+5)=9(k+l)+1+5=9(k+l)+6$

よって，$a+b$ を 9 で割ったときの余りは　6

(2)　$ab=(9k+1)(9l+5)=9^2kl+9k \cdot 5+1 \cdot 9l+1 \cdot 5=9(9kl+5k+l)+5$

よって，ab を 9 で割ったときの余りは　5

9 4^{100} を 7 で割った余りを求めよ。

解答　4

解説

$4^3=64$ を 7 で割った余りは 1 である。

$4^{100}=(4^3)^{33} \cdot 4$ であるから，4^{100} を 7 で割った余りは，$1^{33} \cdot 4$ を 7 で割った余りに等しい。

したがって，4^{100} を 7 で割った余りは　4

10 568 と 213の最大公約数を互除法を用いて求めよ。

解答　71

解説

$568=213 \cdot 2+142$

$213=142 \cdot 1+71$

$142=71 \cdot 2+0$

よって，最大公約数は　71

$$\begin{array}{r} 2 \\ 71 \overline{)\,142} \\ 142 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \overline{)\,213} \\ 142 \\ \hline 71 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \overline{)\,568} \\ 426 \\ \hline 142 \end{array}$$

11 次の方程式の整数解をすべて求めよ。　$30x+17y=2$

解答　k は整数とする。$x=17k+8$，$y=-30k-14$　(同値なものは すべて O.K.)

解説

$30x+17y=2$　……①

① の右辺を 1 とした方程式 $30x+17y=1$ について，$x=4$，$y=-7$ はその整数解の 1 つである。　2

よって　$30 \cdot 4+17 \cdot (-7)=1$

両辺に 2 を掛けて　$30 \cdot 8+17 \cdot (-14)=2$　……②　(他の形でも 可)

①－② から　$30(x-8)+17(y+14)=0$

すなわち　$30(x-8)=-17(y+14)$　……③

30 と 17 は互いに素であるから，$x-8$ は 17 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-8=17k$ と表される。

これを ③ に代入して　$y+14=-30k$

したがって，求める整数解は　$x=17k+8$，$y=-30k-14$　(k は整数)

参考　30 と 17 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$30=17 \cdot 1+13$　移項すると　$13=30-17 \cdot 1$

$17=13 \cdot 1+4$　移項すると　$4=17-13 \cdot 1$

$13=4 \cdot 3+1$　移項すると　$1=13-4 \cdot 3$

よって　$1=13-4 \cdot 3$

$=13-(17-13 \cdot 1) \cdot 3$

$=13 \cdot 4+17 \cdot (-3)$

$=(30-17 \cdot 1) \cdot 4+17 \cdot (-3)$

$=30 \cdot 4+17 \cdot (-7)$

12 5 で割ると 2 余り，14 で割ると 5 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。

解答　117

解説

求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$n=5x+2$，　$n=14y+5$

よって　$5x+2=14y+5$

すなわち　$5x-14y=3$　……①

$x=-5$，$y=-2$ は，$5x-14y=3$ の整数解の 1 つであるから

$5 \cdot (-5)-14 \cdot (-2)=3$　……②

①－② から　$5(x+5)-14(y+2)=0$　……③

5 と 14 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x+5=14k$　すなわち　$x=14k-5$　(k は整数)

と表される。　2

したがって　$n=5x+2=5(14k-5)+2=70k-23$　(x か y を k で表して)

$70k-23$ が 3 桁で最小となるのは，$k=2$ のときで

$n=70 \cdot 2-23=117$

50

13 次の分数を小数で表せ。循環小数は，$0.\dot{3}$ のような表し方で書け。$\dfrac{17}{6}$

解答　$2.8\dot{3}$

解説

$\dfrac{17}{6}=2.8333\cdots\cdots$ ②　よって　$2.8\dot{3}$

14 次の分数を小数で表したとき，[ ]内の数字を求めよ。$\dfrac{7}{13}$ [小数第 200 位]

解答　3

解説

$\dfrac{7}{13}$ を小数で表すと　$\dfrac{7}{13}=0.\dot{5}3846\dot{1}$ ②

小数点以下で 538461 の 6 個の数字が循環する。

$200=6\cdot 33+2$ であるから，小数第 200 位の数字は 538461 の 2 番目の数字で　3

15 次の数を 10 進法で表せ。　(1) $111_{(2)}$　(2) $10202_{(3)}$

解答　(1) 7　(2) 101

解説

(1) $111_{(2)}=1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=4+2+1=7$

(2) $10202_{(3)}=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3^1+2\cdot 3^0=81+0+18+0+2=101$

16 10 進数 25 を2 進法で表せ。

((2)がなくても可)

解答　$11001_{(2)}$

解説

25 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返すと
右のようになる。
余りを逆順に並べて　$11001_{(2)}$

		余り
2)	25	
2)	12	… 1
2)	6	… 0
2)	3	… 0
2)	1	… 1
	0	… 1

17 $0.111_{(2)}$を 10 進法の小数で表せ。

解答　0.875

解説

$0.111_{(2)}=1\cdot\dfrac{1}{2^1}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=0.5+0.25+0.125=0.875$

18 10 進数0.375を2 進法で表せ。

解答　$0.011_{(2)}$

解説

0.375 に 2 を掛け，小数部分に 2 を掛けることを繰り返すと
右のようになる。
出てきた整数部分を順に並べて　$0.011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0.750 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.0 \end{array}$$

19 次の数を[ ]内の表し方で表せ。　$1234_{(5)}$　[4 進法]

解答　$3002_{(4)}$

解説

$1234_{(5)}$ を 10 進法で表すと

$1234_{(5)}=1\cdot 5^3+2\cdot 5^2+3\cdot 5^1+4\cdot 5^0$

$=125+50+15+4=194$ ②

次に 194 を 4 進法で表す。

194 を 4 で割り，商を 4 で割る割り算を繰り返すと
右のようになる。

余りを逆順に並べて　$3002_{(4)}$

よって　$1234_{(5)}=3002_{(4)}$

		余り
4)	194	
4)	48	… 2
4)	12	… 0
4)	3	… 0
	0	… 3

20 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$(x+4)(y+7)=13$

解答　$(x,\ y)=(-3,\ 6),\ (9,\ -6),\ (-5,\ -20),\ (-17,\ -8)$　(各1)

解説

$x,\ y$ は整数であるから，$x+4,\ y+7$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y+7)=(1,\ 13),\ (13,\ 1),\ (-1,\ -13),\ (-13,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-3,\ 6),\ (9,\ -6),\ (-5,\ -20),\ (-17,\ -8)$

21 n が偶数のとき，n^2-2n は 8 の倍数であることを証明せよ。　//

解説

偶数は，整数 k を用いて $2k$ と表される。

$n=2k$ とすると

$n^2-2n=n(n-2)=2k(2k-2)=4(k-1)k$ ②

連続する 2 つの整数 $k-1$，k のいずれかは 2 の倍数であるから，その積 $(k-1)k$ は 2 の倍数である。

よって，$4(k-1)k$ は，8 の倍数である。

したがって，n が偶数のとき，n^2-2n は 8 の倍数である。

22 n は整数とする。n^2+n+2 は 3 で割り切れないことを証明せよ。　//

解説

すべての整数は，整数 k を用いて

$3k,\ 3k+1,\ 3k+2$

のいずれかの形で表される。　②　(mod でも可)

[1] $n=3k$ のとき

$n^2+n+2=(3k)^2+3k+2=9k^2+3k+2=3(3k^2+k)+2$

[2] $n=3k+1$ のとき

$n^2+n+2=(3k+1)^2+(3k+1)+2$
$=9k^2+6k+1+3k+1+2$
$=3(3k^2+3k+1)+1$

[3] $n=3k+2$ のとき

$n^2+n+2=(3k+2)^2+(3k+2)+2$
$=9k^2+12k+4+3k+2+2$
$=3(3k^2+5k+2)+2$

よって，いずれの場合も，n^2+n+2 は 3 で割り切れない。

23 2 次方程式 $x^2-mx+m-4=0$ が整数解を持つとき，整数 m の値を定めよ。

解答　$m=0,4$

解説

解の公式より　$x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4m+16}}{2}$

x が整数となるためには，根号がはずれる必要がある。つまり

$m^2-4m+16=$平方数　でなければならない。

$m^2-4m+16=n^2$ (n：整数)とおくと，左辺を平方完成して　$(m-2)^2+12=n^2$

つまり　$(m-2)^2-n^2=-12$　より　$(m-2+n)(m-2-n)=-12$　…①

ここで　$(m-2+n)+(m-2-n)=2(m-2)=$偶数　より

$m-2+n$ と $m-2-n$ の偶奇は一致する。

$m-2+n$ と $m-2-n$ は整数であるから，①を満たすのは以下の 4 組である。

$m-2+n$	-6	-2	2	6
$m-2-n$	2	6	-6	-2

それぞれについて求めると　$(m,n)=(0,-4),(4,-4),(0,4),(4,4)$　となる。

したがって　$m=0,4$　である。

$m=0$ のとき，$x^2-4=0$　より　$x=\pm 2$，

$m=4$のとき，$x^2-4x=0$　より　$x=0,4$　となり，確かに整数解を持つ。