数学演習（整数の性質）Ｈ２９．２．２８　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ n は自然数とする。$\dfrac{n}{6}$，$\dfrac{n^2}{196}$，$\dfrac{n^3}{441}$ がすべて自然数となるような n のうち最小のものを求めよ。

$\boxed{2}$ 705，1453，4785 のいずれを割っても，余りが 25 となる自然数のうち，最大のものを求めよ。

$\boxed{3}$ 1 から 240 までの 240 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot240$ について，N を素因数分解したとき，素因数 3 の個数を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。　$4x+5y=100$

$\boxed{5}$ 等式 $4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$\boxed{6}$ 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{7}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。　$xy+3x-4y=18$

$\boxed{8}$ 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。$x^2-4y^2=21$

$\boxed{9}$ a，b が互いに素な自然数のとき，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数であることを示せ。

$\boxed{10}$ n は自然数とする。n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{11}$ $11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{12}$ n は 2 以上の自然数とする。10 進数の 218 を n 進法で表すと $332_{(n)}$ となる。n を求めよ。

$\boxed{13}$ 次の個数を 10 進数で答えよ。

(1)　2 進法で表したとき，6 桁 (この 6 は 10 進数) となるような数の個数

(2)　5 進法で表したとき，4 桁 (この 4 は 10 進数) となるような数の個数

$\boxed{14}$ 次の式を筆算で計算せよ。

(1)　$201_{(3)}+122_{(3)}$　(2)　$1044_{(5)}+2104_{(5)}$　(3)　$6354_{(7)}+3246_{(7)}$

(4)　$453_{(6)}-124_{(6)}$　(5)　$7654_{(8)}-5765_{(8)}$　(6)　$42031_{(5)}-3412_{(5)}$

(7)　$573_{(8)}\times 11_{(8)}$　(8)　$3012_{(4)}\times 13_{(4)}$　(9)　$1032_{(5)}\times 24_{(5)}$

(10)　$1163_{(7)}\div 25_{(7)}$　(11)　$3041_{(5)}\div 21_{(5)}$　(12)　$43021_{(5)}\div 101_{(5)}$

$\boxed{15}$ 3 桁の自然数 N を 7 進法で表すと $a0b_{(7)}$ となり，5 進法で表すと，逆の並びの $b0a_{(5)}$ となるという。a，b を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

$\boxed{16}$ 次の合同式を満たす x を，それぞれの法 m において，$x\equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。ただし，a は m より小さい自然数とする。

(1)　$7x\equiv 3 \pmod{5}$　(2)　$5x\equiv 15 \pmod{13}$　(3)　$4x\equiv 8 \pmod{12}$

$\boxed{17}$ n は自然数とする。合同式を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数　(2)　$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 の倍数

1 n は自然数とする。$\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{441}$ がすべて自然数となるような n のうち最小のものを求めよ。

解答　$n=42$

解説

$\frac{n}{6}$ が自然数であるから，$n=2\cdot3\cdot k$（k は自然数）とおける。

$\frac{n^2}{196}=\frac{2^2\cdot3^2\cdot k^2}{2^2\cdot7^2}=\frac{3^2}{7^2}k^2$ が自然数であるから，$k=7l$（l は自然数）とおける。

ゆえに　$n=2\cdot3\cdot7\cdot l$

このとき，$\frac{n^3}{441}=\frac{2^3\cdot3^3\cdot7^3\cdot l^3}{3^2\cdot7^2}=2^3\cdot3\cdot7\cdot l^3$ は自然数となる。

よって，$l=1$ のとき n の最小値は　$n=42$

2 705，1453，4785 のいずれを割っても，余りが 25 となる自然数のうち，最大のものを求めよ。

解答　68

解説

$705-25=680$，$1453-25=1428$，$4785-25=4760$

よって，680，1428，4760 の最大公約数が求める自然数である。

3 つの数を素因数分解すると

$680=2^3\cdot5\cdot17$，$1428=2^2\cdot3\cdot7\cdot17$，$4760=2^3\cdot5\cdot7\cdot17$

これらの最大公約数，すなわち求める自然数は　$2^2\cdot17=68$

3 1 から 240 までの 240 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot240$ について，N を素因数分解したとき，素因数 3 の個数を求めよ。

解答　116 個

解説

1 から 240 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，240 を 3 で割った商で　80

3^2 の倍数の個数は，240 を 3^2 で割った商で　26

3^3 の倍数の個数は，240 を 3^3 で割った商で　8

3^4 の倍数の個数は，240 を 3^4 で割った商で　2

よって，N を素因数分解したときの素因数 3 の個数は

$80+26+8+2=116$　すなわち　116 個

4 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。　$4x+5y=100$

解答　$(x,\ y)=(5,\ 16)$，$(10,\ 12)$，$(15,\ 8)$，$(20,\ 4)$

解説

$4x+5y=100$ から　$4x=5(20-y)$　……①

$x>0$ であるから　$5(20-y)>0$　　ゆえに　$y<20$

① において，$4x$ は 4 の倍数であるから，$5(20-y)$ は 4 の倍数である。

よって　$y=4,\ 8,\ 12,\ 16$

① から　$y=4$ のとき $x=20$，　$y=8$ のとき $x=15$，

$y=12$ のとき $x=10$，　$y=16$ のとき $x=5$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 16)$，$(10,\ 12)$，$(15,\ 8)$，$(20,\ 4)$

5 等式 $4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9)$，$(1,\ 2,\ 7)$，$(1,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 4,\ 3)$，$(1,\ 5,\ 1)$，
$(2,\ 1,\ 5)$，$(2,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 1)$

解説

$y\geqq1$，$z\geqq1$ であるから　$4x=15-2y-z\leqq15-2\cdot1-1=12$

ゆえに　$x\leqq3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$2y+z=11$

$z\geqq1$ であるから　$2y=11-z\leqq11-1=10$

ゆえに　$y\leqq5$

y は自然数であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 9)$，$(2,\ 7)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 1)$

[2]　$x=2$ のとき　$2y+z=7$

$z\geqq1$ であるから　$2y=7-z\leqq7-1=6$

ゆえに　$y\leqq3$

y は自然数であるから　$y=1,\ 2,\ 3$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$

[3]　$x=3$ のとき　$2y+z=3$

$z\geqq1$ であるから　$2y=3-z\leqq3-1=2$

ゆえに　$y\leqq1$

y は自然数であるから　$y=1$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

以上から　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9)$，$(1,\ 2,\ 7)$，$(1,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 4,\ 3)$，$(1,\ 5,\ 1)$，
$(2,\ 1,\ 5)$，$(2,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 1)$

6 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$

解答　$(x,\ y)=(6,\ 30)$，$(30,\ 6)$，$(10,\ 10)$

解説

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ の両辺に $5xy$ を掛けると　$5y+5x=xy$

すなわち　$xy-5x-5y=0$　　変形すると　$(x-5)(y-5)=25$

x，y は自然数であるから，$x-5$，$y-5$ は整数で，$x-5\geqq-4$，$y-5\geqq-4$ である。

ゆえに　$(x-5,\ y-5)=(1,\ 25)$，$(25,\ 1)$，$(5,\ 5)$

よって　$(x,\ y)=(6,\ 30)$，$(30,\ 6)$，$(10,\ 10)$

7 次の方程式の整数解をすべて求めよ。　$xy+3x-4y=18$

解答　$(x,\ y)=(5,\ 3)$，$(10,\ -2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ -1)$，$(3,\ -9)$，
$(-2,\ -4)$，$(2,\ -6)$，$(1,\ -5)$

解説

方程式は次のように変形できる。

$(x-4)(y+3)+12=18$

すなわち　$(x-4)(y+3)=6$

x，y は整数であるから，$x-4$，$y+3$ も整数である。

ゆえに　$(x-4,\ y+3)=(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(-1,\ -6)$，
$(-6,\ -1)$，$(-2,\ -3)$，$(-3,\ -2)$

よって　$(x,\ y)=(5,\ 3)$，$(10,\ -2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ -1)$，$(3,\ -9)$，
$(-2,\ -4)$，$(2,\ -6)$，$(1,\ -5)$

8 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。$x^2-4y^2=21$

解答　$(x,\ y)=(5,\ 1)$，$(11,\ 5)$

解説

左辺を因数分解して　$(x+2y)(x-2y)=21$

x，y は自然数であるから，$x+2y$ は 3 以上の自然数，$x-2y$ は整数である。

ゆえに　$(x+2y,\ x-2y)=(3,\ 7)$，$(7,\ 3)$，$(21,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(5,\ -1)$，$(5,\ 1)$，$(11,\ 5)$

x，y は自然数であるから　$(x,\ y)=(5,\ 1)$，$(11,\ 5)$

9 a，b が互いに素な自然数のとき，$\frac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数であることを示せ。

解答　略

解説

$3a+7b=(2a+5b)\cdot1+a+2b$

$2a+5b=(a+2b)\cdot2+b$

$a+2b=b\cdot2+a$

よって，$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は a と b の最大公約数に等しい。

a と b は互いに素であるから，最大公約数は 1 である。

ゆえに，$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は 1 であるから，分母と分子は互いに素である。

したがって，分数 $\frac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

10 n は自然数とする。n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

解答 1, 2, 13, 26

解説

$n^2+n+6=(n+5)(n-4)+26$

よって，n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数は，$n+5$ と 26 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，26 の約数の 1，2，13，26 である。

ここで，$n+5$ と 26 の最大公約数を g とすると，例えば

$n+5=7$ すなわち $n=2$ のとき　$g=1$

$n+5=6$ すなわち $n=1$ のとき　$g=2$

$n+5=13$ すなわち $n=8$ のとき　$g=13$

$n+5=26$ すなわち $n=21$ のとき　$g=26$

となる。

よって，求める数は　1，2，13，26

11 $11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答 $n=2,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 47$

解説

$11n+28=(4n+7)\cdot 2+3n+14$,　$4n+7=(3n+14)\cdot 1+n-7$,

$3n+14=(n-7)\cdot 3+35$

よって，$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数は，$n-7$ と 35 の最大公約数に等しい。

$35=5\cdot 7$ であるから，$n-7$ は 5 の倍数であるが，7 の倍数でない。

また，$-6\leqq n-7\leqq 43$ であるから

$n-7=-5,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40$

よって　$n=2,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 47$

12 n は 2 以上の自然数とする。10 進数の 218 を n 進法で表すと $332_{(n)}$ となる。n を求めよ。

解答 $n=8$

解説

$218=3\cdot n^2+3\cdot n^1+2\cdot n^0$

整理すると　$n^2+n-72=0$

すなわち　$(n+9)(n-8)=0$

n は 2 以上の自然数であるから　$n=8$

13 次の個数を 10 進数で答えよ。

(1) 2 進法で表したとき，6 桁 (この 6 は 10 進数) となるような数の個数

(2) 5 進法で表したとき，4 桁 (この 4 は 10 進数) となるような数の個数

解答 (1) 32 個　(2) 500 個

解説

(1) 2 進法で表したとき，6 桁となる数は，$1□□□□□_{(2)}$ の □ に 0 または 1 を入れた数である。

このような数の個数は　$2^5=32$ (個)

(2) 5 進法で表したとき，4 桁となる数は，$○□□□_{(5)}$ の ○ に 1，2，3，4 のいずれかを，□ に 0，1，2，3，4 のいずれかを入れた数である。

このような数の個数は　$4\times 5^3=500$ (個)

14 次の式を筆算で計算せよ。

(1) $201_{(3)}+122_{(3)}$　(2) $1044_{(5)}+2104_{(5)}$　(3) $6354_{(7)}+3246_{(7)}$

(4) $453_{(6)}-124_{(6)}$　(5) $7654_{(8)}-5765_{(8)}$　(6) $42031_{(5)}-3412_{(5)}$

(7) $573_{(8)}\times 11_{(8)}$　(8) $3012_{(4)}\times 13_{(4)}$　(9) $1032_{(5)}\times 24_{(5)}$

(10) $1163_{(7)}\div 25_{(7)}$　(11) $3041_{(5)}\div 21_{(5)}$　(12) $43021_{(5)}\div 101_{(5)}$

解答 (1) $1100_{(3)}$　(2) $3203_{(5)}$　(3) $12633_{(7)}$　(4) $325_{(6)}$　(5) $1667_{(8)}$

(6) $33114_{(5)}$　(7) $6523_{(8)}$　(8) $111222_{(4)}$　(9) $30423_{(5)}$　(10) $32_{(7)}$

(11) $121_{(5)}$　(12) $421_{(5)}$

解説

(1) $201_{(3)}+122_{(3)}=1100_{(3)}$　(2) $1044_{(5)}+2104_{(5)}=3203_{(5)}$　(3) $6354_{(7)}+3246_{(7)}=12633_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 201 \\ +\ 122 \\ \hline 1100 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1044 \\ +\ 2104 \\ \hline 3203 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 6354 \\ +\ 3246 \\ \hline 12633 \end{array}$$

(4) $453_{(6)}-124_{(6)}=325_{(6)}$　(5) $7654_{(8)}-5765_{(8)}=1667_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 453 \\ -\ 124 \\ \hline 325 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 7654 \\ -\ 5765 \\ \hline 1667 \end{array}$$

(6) $42031_{(5)}-3412_{(5)}=33114_{(5)}$　(7) $573_{(8)}\times 11_{(8)}=6523_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 42031 \\ -\ 3412 \\ \hline 33114 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 573 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 573 \\ 573\ \\ \hline 6523 \end{array}$$

(8) $3012_{(4)}\times 13_{(4)}=111222_{(4)}$　(9) $1032_{(5)}\times 24_{(5)}=30423_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 3012 \\ \times\ \ 13 \\ \hline 21102 \\ 3012\ \\ \hline 111222 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1032 \\ \times\ \ 24 \\ \hline 4233 \\ 2114\ \\ \hline 30423 \end{array}$$

(10) $1163_{(7)}\div 25_{(7)}=32_{(7)}$　(11) $3041_{(5)}\div 21_{(5)}=121_{(5)}$　(12) $43021_{(5)}\div 101_{(5)}=421_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 25\overline{)1163} \\ 111\ \\ \hline 53 \\ 53 \\ \hline 0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 121 \\ 21\overline{)3041} \\ 21\ \ \\ \hline 44\ \\ 42\ \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 421 \\ 101\overline{)43021} \\ 404\ \ \\ \hline 212\ \\ 202\ \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 0 \end{array}$$

15 3 桁の自然数 N を 7 進法で表すと $a0b_{(7)}$ となり，5 進法で表すと，逆の並びの $b0a_{(5)}$ となるという。a，b を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

解答 $a=2,\ b=4,\ N=102$

解説

$a0b_{(7)}$ は 7 進数であるから　$1\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6$

$b0a_{(5)}$ は 5 進数であるから　$1\leqq b\leqq 4,\ 0\leqq a\leqq 4$

よって　$1\leqq a\leqq 4,\ 1\leqq b\leqq 4$　…… ①

N を 10 進法で表すと

$N=a0b_{(7)}=a\cdot 7^2+0\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49a+b$

$N=b0a_{(5)}=b\cdot 5^2+0\cdot 5^1+a\cdot 5^0=25b+a$

ゆえに　$49a+b=25b+a$　　整理すると　$2a=b$

これと ① を満たす整数 a，b の組は　$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 4)$

[1] $(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき

$N=49\cdot 1+2=51$

これは 2 桁の数であり，適さない。

[2] $(a,\ b)=(2,\ 4)$ のとき

$N=49\cdot 2+4=102$

これは 3 桁の数であり，適する。

したがって　$a=2,\ b=4,\ N=102$

16 次の合同式を満たす x を，それぞれの法 m において，$x\equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。ただし，a は m より小さい自然数とする。

(1) $7x\equiv 3 \pmod{5}$　(2) $5x\equiv 15 \pmod{13}$　(3) $4x\equiv 8 \pmod{12}$

解答 (1) $x\equiv 4 \pmod{5}$　(2) $x\equiv 3 \pmod{13}$　(3) $x\equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \pmod{12}$

解説

(1) $7x\equiv 3 \pmod{5}$ の両辺に 3 を掛けて　$21x\equiv 9 \pmod{5}$

$21x\equiv 1\cdot x\equiv x \pmod{5}$，$9\equiv 4 \pmod{5}$ であるから　$x\equiv 4 \pmod{5}$

(2) $15\equiv 2 \pmod{13}$ であるから　$5x\equiv 2 \pmod{13}$

両辺に 8 を掛けて　$40x\equiv 16 \pmod{13}$

$40x\equiv 1\cdot x\equiv x \pmod{13}$，$16\equiv 3 \pmod{13}$ であるから　$x\equiv 3 \pmod{13}$

別解 5 と 13 は互いに素であるから，$5x\equiv 15 \pmod{13}$ の両辺を 5 で割ると

$x\equiv 3 \pmod{13}$

(3) 下の表より，$4x\equiv 8 \pmod{12}$ となるのは，$x=2,\ 5,\ 8,\ 11$ のときである。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$4x$	0	4	8	$12\equiv 0$	$16\equiv 4$	$20\equiv 8$	$24\equiv 0$	$28\equiv 4$	$32\equiv 8$	$36\equiv 0$	$40\equiv 4$	$44\equiv 8$

よって　$x\equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \pmod{12}$

別解 $4x\equiv 8$　より　$4x-8\equiv 0$　つまり　$4(x-2)\equiv 0 \pmod{12}$

したがって，$4(x-2)$ が 12 の倍数となるので，$x-2$ が 3 の倍数となればいい。

つまり，$x-2\equiv 0 \pmod{3}$　より　$x\equiv 2 \pmod{3}$

17 n は自然数とする。合同式を用いて，次のことを証明せよ。

(1) $2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数　(2) $4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 の倍数

解説

(1) $2^{6n-5}+3^{2n}\equiv 2\cdot 2^{6(n-1)}+(3^2)^n\equiv 2\cdot 64^{n-1}+9^n$

$\equiv 2\cdot(-2)^{n-1}+(-2)^n$

$\equiv -(-2)^n+(-2)^n\equiv 0 \pmod{11}$

よって，$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である。

(2) $4^{n+1}+5^{2n-1}\equiv 4^2\cdot 4^{n-1}+5\cdot 5^{2(n-1)}$

$\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 25^{n-1}$

$\equiv -5\cdot 4^{n-1}+5\cdot 4^{n-1}\equiv 0 \pmod{21}$

よって，$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 の倍数である。