数学演習（整数）Ｈ２６．１．２７　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．$a=-26$，$b=6$について，a を b で割った商と余りを求めよ。

２．n は整数とする。$2n^3-3n^2+n$ は6の倍数であることを，２通りの方法で証明せよ。

３．135以下の自然数で，135と互いに素である自然数の個数を求めよ。

４．$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 となるような50以下の自然数をすべて求めよ。

５．方程式 $4x+5y=1$ の解をすべて求めよ。

６．13 で割ると 2 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3桁で最大のものを求めよ。

7．等式 $\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{y}=1$ を満たす自然数の組 x，y をすべて求めよ。

8．分数 $\dfrac{1}{7}$ を小数で表したとき，小数第1位から小数第543位までに出てくる数字の総和を求めよ。

9．10進法123を5進法で表せ。

10．10進法0.8125を4進法で表せ。

11．次の計算の結果を2進法で表せ。　$11101_{(2)}\times 101_{(2)}$

12．次の計算の結果を5進法で表せ。　$2341_{(5)}-1432_{(5)}$

13．nは自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

14．自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも一つは3の倍数であることを証明せよ。

数学演習（整数）H26．1．27　　（　）組（　）番　名前（ こたえ ）

1．$a=-26$，$b=6$について，a を b で割った商と余りを求めよ。

$a=-26=-30+4$

$=6\times(-5)+4$

よって 商 -5，余り 4

4

2．n は整数とする。$2n^3-3n^2+n$ は6の倍数であることを，２通りの方法で証明せよ。

①

$2n^3-3n^2+n$

$=n(2n^2-3n+1)$

$=n(n-1)(2n-1)$

$=n(n-1)\{(n+1)+(n-2)\}$ 展開

$=n(n-1)(n+1)+n(n-1)(n-2)$

$=(n-1)n(n+1)+n(n-1)(n-2)$

それぞれについて，連続する3つの整数の積より 6の倍数となる。よって 6の倍数の和より $2n^3-3n^2+n$ は6の倍数となる。

②

$2n^3-3n^2+n=n(n-1)(2n-1)$

$n(n-1)$は連続する2つの整数の積より 必ず 2の倍数となる。

$n(n-1)(2n-1)$が3の倍数であることを示せばいい。

ゆえに，$2n^3-3n^2+n$ が 3の倍数であることを示せばいい。

mod 3で考えて

$n\equiv0$ のとき $2n^3-3n^2+n\equiv2\cdot0^3-3\cdot0^2+0\equiv0$

$n\equiv1$ のとき $2\cdot1^3-3\cdot1^2+1\equiv2-3+1\equiv0$

$n\equiv2$ のとき $2\cdot2^3-3\cdot2^2+2\equiv16-12+2\equiv6\equiv0$

以上より $2n^3-3n^2+n$ は n がいくつでも 3の倍数になるので，6の倍数となる。

③

$2n^3-3n^2+n$

$=n(n-1)(2n-1)$

$=n(n-1)(2n-4+3)$

$=n(n-1)(2n-4)+n(n-1)\times3$

$=\underbrace{2n(n-1)(n-2)}_{6の倍数}+\underbrace{3n(n-1)}_{偶数}$ 6の倍数

16

（78）

④

mod 6で考えて

$n\equiv0,1,2,3,4,5$ において $2n^3-3n^2+n\equiv0$ を示す。

3．135以下の自然数で，135と互いに素である自然数の個数を求めよ。

135と互いに素でないとは，

135との最大公約数が

2以上である。

$135=5\times3^3$

であるから，135以下の

「3の倍数 または 5の倍数」

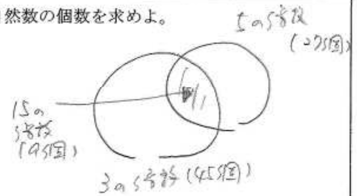
である数は，135との

最大公約数が 2以上になる。

3の倍数 → $135\div3=45$個

5の倍数 → $135\div5=27$個

15の倍数 → $135\div15=9$個



ゆえに，3の倍数 または 5の倍数は

$45+27-9=63$個

ゆえに，135と互いに素である自然数は

$135-63$

$=72$個

8

4．$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 となるような50以下の自然数をすべて求めよ。

互除法より

$$\begin{array}{l} 4n+15 = (3n+13)\times1+(n+2) \\ 3n+13 = (n+2)\times3+7 \end{array}$$

$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数は

$n+2$ と 7 の最大公約数に

等しい。問題より

$n+2$ と 7 の最大公約数が 7

になるには，$n+2$ が

7の倍数になればいい。

$n\leqq50$ より $n+2\leqq52$

であるから，52以下の 7の倍数は

$n+2=7,14,21,28,35,42,49$

よって

$n=5,12,19,$

$26,33,40,$

47

8

5．方程式 $4x+5y=1$ の解をすべて求めよ。

$4x+5y=1$ の解の1つとして

$x=-1$，$y=1$

がある。

$4x+5y=1$

$-)\ 4(-1)+5\cdot1=1$

$4(x+1)+5(y-1)=0$

ゆえに

$4(x+1)=-5(y-1)\cdots(*)$

$(*)$より 4と5は互いに素より

$x+1$は5の倍数から，

kを整数として

$x+1=5k$

∴ $x=5k-1$

$(*)$に代入して

$4\cdot5k=-5(y-1)$

∴ $y=-4k+1$

したがって

$$\begin{cases} x=5k-1 \\ y=-4k+1 \end{cases}$$

8

6．13で割ると２余り，9で割ると６余るような自然数のうち，3桁で最大のものを求めよ。

求める自然数を n とすると

nは13で割ると2余るので

$n\equiv2\pmod{13}\cdots①$

また，nは9で割ると6余るので

$n=9x+6\ \cdots②$

とおける。（xは整数）

②を①に代入して

$9x+6\equiv2$

$2\equiv15\pmod{13}$ より

$9x+6\equiv15$

∴ $9x\equiv9\pmod{13}$

13と9は互いに素より，

両辺9で割って

$x\equiv1\pmod{13}$

（$ax\equiv ay\pmod{n}$ について，aとnが互いに素ならば，両辺をaで割って，$x\equiv y\pmod{n}$が成り立つ）

よって

$x=13k+1$

と書けるので，②に

代入して

$n=9(13k+1)+6$

$=117k+15$

自然数nについて，3桁で最大なものは $n<1000$を満たす最大のnなので

$117k+15<1000$

∴ $k<\dfrac{985}{117}\fallingdotseq8.41$

よって $k=8$ ならばよく

$n=117\times8+15$

$=951$

8

7．等式 $\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{y}=1$ を満たす自然数の組 x, y をすべて求めよ。

両辺に xy をかけて

$6y - x = xy$

∴

$xy + x - 6y = 0$

$x(y+1) - 6y = 0$

$x(y+1) - 6(y+1-1) = 0$

$x(y+1) - 6(y+1) + 6 = 0$

$(x-6)(y+1) = -6$

$x>0,\ y>0$ より

$x-6 > -6,\ y+1 > 1$

よって -6 の約数を考えて

$x-6$	-3	-2	-1
$y+1$	2	3	6

のみである。

ゆえに

x	3	4	5
y	1	2	5

よって

$(x,y) = (3,1),\ (4,2),\ (5,5)$

8

8．分数 $\dfrac{1}{7}$ を小数で表したとき，小数第1位から小数第543位までに出てくる数字の総和を求めよ。

$\dfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

より 142857 が循環する。

第543位までには

$543 = 6\times 90 + 3$

より「142857」のセットが90回現れ、そして 1, 4, 2 が現れる。この2が第543位である。

ゆえに「142857」のセットを90個と1と4と2を加えればいいので

$(1+4+2+8+5+7)\times 90 + (1+4+2)$

$= 27\times 90 + 7$

$= 2430 + 7 = 2437$

$$\begin{array}{r} 0.1428574 \\ 7\,)\overline{10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 90 \\ 6\,)\overline{543} \\ 54 \\ \hline 3 \end{array}$$

8

9．10進法123を5進法で表せ。

		余り
5) 123		
5) 24	…	3
5) 4	…	4
0	…	4

$123_{(10)} = 443_{(5)}$

4

10．10進法0.8125を4進法で表せ。

$$\begin{array}{rl} 0.8125 & \to 0 \\ \times\quad 4 & \\ \hline 3.2500 & \to 3 \\ \times\ 4 & \\ \hline 1.00 & \to 1 \end{array}$$

$0.8125_{(10)} = 0.31_{(4)}$

4

11．次の計算の結果を2進法で表せ。　$11101_{(2)}\times 101_{(2)}$

$11101_{(2)}\times 101_{(2)}$

$= 10010001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times)\quad 101 \\ \hline 11101 \\ 00000\ \\ 11101\ \ \\ \hline 10010001 \end{array}$$

（$11101_{(2)} = 29$

$101_{(2)} = 5$

より $29\times 5 = 145$ を2進法に直してもいい）

4

12．次の計算の結果を5進法で表せ。　$2341_{(5)}-1432_{(5)}$

$2341_{(5)} - 1432_{(5)}$

$= 404_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 2341 \\ -)\ 1432 \\ \hline 404 \end{array}$$

（$2341_{(5)} = 2\times 5^3 + 3\times 5^2 + 4\times 5^1 + 1\times 5^0$

$= 250 + 75 + 20 + 1$

$= 346$

$1432_{(5)} = 125 + 100 + 15 + 2$

$= 242$

より $346 - 242 = 104$ を5進法に直してもいい）

4

13．n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

$n^2 - 14n + 40 = (n-10)(n-4)$

素数とは、素因数を持ったとしても 1か−1なので

$n-10 = \pm 1,\ n-4 = \pm 1$

よって答えは $n = 11, 9, 5, 3$ のどれかである。

それぞれについて $n^2-14n+40$ の値を調べると

$n=11$ … $(11-10)(11-4) = 1\times 7 = 7$（適する）

$n=9$ … $(9-10)(9-4) = (-1)\times 5 = -5$

しかし負の数となるので不適

$n=5$ … $(5-10)(5-4) = (-5)\times 1 = -5$（不適）

$n=3$ … $(3-10)(3-4) = (-7)\times(-1) = 7$（適する）

以上より $n = 11, 3$

8

14．自然数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも一つは3の倍数であることを証明せよ。

背理法で示す。つまり $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a, b, c について、

「a, b の両方とも3の倍数でない」…(*)

と仮定する。すると mod 3 で考えたとき $a\equiv 1$ または $a\equiv 2$ であるが、

$a\equiv 1$ のとき $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1$

$a\equiv 2$ のとき $a^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1$

なので、$a^2\equiv 1$ が必ず成り立つ。b についても同様で b が3の倍数でないならば $b^2\equiv 1$ が成り立つ。

したがって a^2+b^2 は

$a^2+b^2 \equiv 1+1 \equiv 2$ …①

が成り立つ。ここで、c について

$c\equiv 0$ ならば $c^2\equiv 0$，$c\equiv 1, 2$ ならば $c^2\equiv 1$

となるので、c^2 は2になることはない。…②

しかし $a^2+b^2=c^2$ が成り立つから ①より

$c^2 \equiv 2$

となるが、これは②と矛盾する。

ゆえに(*)の仮定は間違いであったから

a, b の少なくとも一方は3の倍数である。//

8

/48