数学演習（整数の性質）Ｈ２９．２．２１　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ a，b は整数とする。a，b が 5 の倍数ならば，$3a^2+7ab+b^2$ は 25 の倍数である。

$\boxed{2}$ 一の位の数がわからない 5 桁の自然数 3817□ が，5 の倍数であり，3 の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

$\boxed{3}$ $\sqrt{480n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{4}$ 200の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。

$\boxed{5}$ 4 桁の自然数 835□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

$\boxed{6}$ ある 2 桁の整数を 9 倍して 81 を足すと，百の位は 5，十の位は 7 であるとき，もとの整数を求めよ。

$\boxed{7}$ 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の 2 つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。　612，918

$\boxed{9}$ n は正の整数とする。n と 36 の最小公倍数が 360となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ a は自然数とする。$a+2$ は 7 の倍数であり，$a+7$ は 9 の倍数であるとき，$a+16$ は 63 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{11}$ 最大公約数が 18，最小公倍数が 270となるような 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

$\boxed{12}$ a，b は整数とする。a を 8 で割ると 4 余り，b を 8 で割ると 5 余る。次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ。　(1)　$5a+4b$　　(2)　ab　　(3)　$2a^2-3b^2$

$\boxed{13}$ n は整数とする。n^2+1 は 3 の倍数でないことを証明せよ。

$\boxed{14}$ 135 以下の自然数で，135 と互いに素である自然数の個数を求めよ。

$\boxed{15}$ 1 から 145 までの 145 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 145$を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{16}$ 次のものを求めよ。

(1) 26^{100} を 5 で割った余り (2) 3^{200} を 13 で割った余り

$\boxed{17}$ 次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。 961，217

$\boxed{18}$ 次の等式を満たす整数 x，y の組を互除法を用いて 1 つ求めよ。 $141x-52y=4$

$\boxed{19}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。 $13x+8y=7$

$\boxed{20}$ 13 で割ると 2 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3 桁で最大のものと最小のものを求めよ。

$\boxed{21}$ 次の分数を小数で表したとき，[ ] 内の数字を求めよ。 $\dfrac{7}{13}$ [小数第 200 位]

$\boxed{22}$ 次の数を 10 進法で表せ。 $3412_{(5)}$

$\boxed{23}$ 次の 10 進数を [ ] 内の表し方で表せ。 (1) 96 [3 進法] (2) 634 [7 進法]

$\boxed{24}$ 次の数を 10 進法の小数で表せ。 (1) $0.111_{(2)}$ (2) $0.432_{(5)}$

$\boxed{25}$ 次の計算の結果を，2 進法で表せ。

(1) $11101_{(2)}\times 101_{(2)}$ (2) $110111_{(2)}\div 101_{(2)}$

$\boxed{26}$ 次の 10 進数を [ ] 内の表し方で表せ。 0.5625 [2 進法]

1 a，b は整数とする。a，b が 5 の倍数ならば，$3a^2+7ab+b^2$ は 25 の倍数である。

解説

a，b は 5 の倍数であるから，整数 k，l を用いて　$a=5k$，$b=5l$　と表される。

よって　$3a^2+7ab+b^2=3\cdot(5k)^2+7\cdot5k\cdot5l+(5l)^2=25(3k^2+7kl+l^2)$

$3k^2+7kl+l^2$ は整数であるから，$3a^2+7ab+b^2$ は 25 の倍数である。

2 一の位の数がわからない 5 桁の自然数 3817□ が，5 の倍数であり，3 の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。　解答　5

解説

□ に入る数字を a $(0\leqq a\leqq9)$ とする。

3817□ が 5 の倍数であるから　$a=0,\ 5$

各位の数の和は　$3+8+1+7+a=19+a$

これが 3 の倍数であるとき，3817□ は 3 の倍数になる。

$19+a$ が 3 の倍数になるのは，$a=5$ のときである。

よって，求める数は　5

3 $\sqrt{480n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。　解答　$n=30$

解説

$\sqrt{480n}$ が自然数になるには，$480n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

480 を素因数分解すると　$480=2^5\cdot3\cdot5$

480 に $2\cdot3\cdot5$ を掛けると，$2^6\cdot3^2\cdot5^2$ すなわち $(2^3\cdot3\cdot5)^2$ になる。

したがって，求める自然数 n は　$n=2\cdot3\cdot5=30$

4 200の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。　解答　12 個，465

解説

$200=2^3\cdot5^2$ であるから，200 の正の約数は，2^3 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の 4 個　　5^2 の正の約数は　1，5，5^2 の 3 個

よって，200 の正の約数の個数は，積の法則により　$4\times3=12$（個）

また，200 の正の約数は，$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$ を展開した項にすべて現れるから，その約数の総和は　$(1+2+4+8)(1+5+25)=15\times31=465$

参考　正の約数の個数は　$(3+1)(2+1)=12$（個）

5 4 桁の自然数 835□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。解答　2，6

解説

□ に入る数を a $(0\leqq a\leqq9)$ とする。

下 2 桁が 4 の倍数であるとき，4 桁の自然数は 4 の倍数になる。

下 2 桁すなわち $50+a$ が 4 の倍数になるのは，$a=2,\ 6$ のときである。

よって，求める数は　2，6

6 ある 2 桁の整数を 9 倍して 81 を足すと，百の位は 5，十の位は 7 であるとき，もとの整数を求めよ。　解答　55

解説

ある 2 桁の整数を x とすると，x を 9 倍して 81 を足した数は

$$9x+81=9(x+9)$$

より，9 の倍数であり，各位の数の和は 9 の倍数になる。

よって，その一の位の数を c とすると，$5+7+c=12+c$ が 9 の倍数より　$c=6$

したがって　$9(x+9)=576$　これを解いて　$x=55$　よって，求める整数は　55

7 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。　解答　$n=576$

解説

21 を素因数分解すると　$21=3\cdot7$

よって，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{20}，p^2q^6（p，q は異なる素数）のいずれかの形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=3\cdot2^3$ であるから，n は p^2q^6 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　$n=3^2\cdot2^6=576$

8 次の 2 つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。　612，918

解答　最大公約数，最小公倍数の順に　306，1836

解説

$612=2^2\cdot3^2\cdot17$　　$918=2\cdot3^3\cdot17$

よって，最大公約数は　$2\cdot3^2\cdot17=306$　　最小公倍数は　$2^2\cdot3^3\cdot17=1836$

9 n は正の整数とする。n と 36 の最小公倍数が 360となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=40,\ 120,\ 360$

解説

36 と 360 を素因数分解すると　$36=2^2\cdot3^2$，　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，36 との最小公倍数が 360 である正の整数は

$2^3\cdot3^a\cdot5$　$(a=0,\ 1,\ 2)$

と表される。

したがって，求める整数 n は

$n=2^3\cdot3^0\cdot5,\ 2^3\cdot3^1\cdot5,\ 2^3\cdot3^2\cdot5$

すなわち　$n=40,\ 120,\ 360$

10 a は自然数とする。$a+2$ は 7 の倍数であり，$a+7$ は 9 の倍数であるとき，$a+16$ は 63 の倍数であることを証明せよ。

解説

$a+2$，$a+7$ は，自然数 m，n を用いて $a+2=7m$，$a+7=9n$ と表される。

$a+16=(a+2)+14=7m+14=7(m+2)$　……①

また　$a+16=(a+7)+9=9n+9=9(n+1)$　……②

よって，① より $a+16$ は 7 の倍数であり，② より $a+16$ は 9 の倍数でもある。

7 と 9 は互いに素であるから，$a+16$ は $7\cdot9$ の倍数すなわち 63 の倍数である。

11 最大公約数が 18，最小公倍数が 270となるような 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

解答　$(a,\ b)=(18,\ 270),\ (54,\ 90)$

解説

最大公約数が 18 であるから，a，b は

$a=18a'$，$b=18b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $18a'b'$ と表されるから

$18a'b'=270$　　すなわち　$a'b'=15$

$a'b'=15$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

よって　$(a,\ b)=(18,\ 270),\ (54,\ 90)$

12 a，b は整数とする。a を 8 で割ると 4 余り，b を 8 で割ると 5 余る。次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ。　(1)　$5a+4b$　　(2)　ab　　(3)　$2a^2-3b^2$

解答　(1)　0　　(2)　4　　(3)　5

解説

a，b は，整数 k，l を用いて $a=8k+4$，　$b=8l+5$　と表される。

(1)　$5a+4b=5(8k+4)+4(8l+5)$

$=8(5k+4l)+20+20$

$=8(5k+4l+5)$

よって，$5a+4b$ を 8 で割ったときの余りは　0

(2)　$ab=(8k+4)(8l+5)$

$=8^2kl+8k\cdot5+4\cdot8l+4\cdot5$

$=8(8kl+5k+4l+2)+4$

よって，ab を 8 で割ったときの余りは　4

(3)　$2a^2-3b^2=2(8k+4)^2-3(8l+5)^2$

$=2(8^2k^2+2\cdot8k\cdot4+4^2)-3(8^2l^2+2\cdot8l\cdot5+5^2)$

$=8(16k^2+16k-24l^2-30l)+32-75$

$=8(16k^2+16k-24l^2-30l-6)+5$

よって，$2a^2-3b^2$ を 8 で割ったときの余りは　5

13 n は整数とする。n^2+1 は 3 の倍数でないことを証明せよ。

解説

すべての整数 n は

$n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$　（k は整数）

のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot3k^2+1$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$

いずれの場合も n^2+1 は 3 の倍数でない。

よって，n^2+1 は 3 の倍数でない。

14 135 以下の自然数で，135 と互いに素である自然数の個数を求めよ。　解答　72 個

解説

$135=3^3\cdot5$ であるから，135 と互いに素である自然数は，3 の倍数でも 5 の倍数でもない自然数である。

ここで，135 以下の自然数で，3 の倍数または 5 の倍数である数の個数を求める。

3 の倍数の個数は，135 を 3 で割ったときの商で　45

5 の倍数の個数は，135 を 5 で割ったときの商で　27

また，3 の倍数かつ 5 の倍数である数の個数，すなわち

15 の倍数の個数は，135 を 15 で割ったときの商で　9

よって，3 の倍数または 5 の倍数であるものの個数は

$$45+27-9=63$$

したがって，135 以下の自然数で，135 と互いに素である自然数の個数は

$135-63=72$　すなわち　72 個

15 1 から 145 までの 145 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot145$ を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。　解答　35 個

解説

末尾に続く 0 の個数は，$N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot145$ に含まれる因数 10 の個数であり，10 は $2\cdot5$ と素因数分解される。

1，2，3，……，145 に含まれる素因数 2 の個数は，明らかに素因数 5 の個数より多いから，因数 10 の個数は素因数 5 の個数と一致する。

1 から 145 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，145 を 5 で割った商で　29

5^2 の倍数の個数は，145 を 5^2 で割った商で　5

5^3 の倍数の個数は，145 を 5^3 で割った商で　1

よって，素因数 5 の個数は全部で　$29+5+1=35$

したがって，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 35 個並ぶ。

16 次のものを求めよ。

(1)　26^{100} を 5 で割った余り　　(2)　3^{200} を 13 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　9

解説

(1)　26 を 5 で割った余りは 1 である。

よって，26^{100} を 5 で割った余りは，1^{100} を 5 で割った余りに等しい。

したがって，26^{100} を 5 で割った余りは　1

別解　$26\equiv1 \pmod 5$ であるから　$26^{100}\equiv1^{100}\equiv1 \pmod 5$

よって，26^{100} を 5 で割った余りは　1

(2)　3^3 を 13 で割った余りは 1 である。

よって，$3^{200}=(3^3)^{66}\cdot3^2$ を 13 で割った余りは，$1^{66}\cdot3^2$ を 13 で割った余りに等しい。

したがって，3^{200} を 13 で割った余りは　9

別解　$3^3\equiv1 \pmod{13}$ であるから　$3^{200}\equiv(3^3)^{66}\cdot3^2\equiv1^{66}\cdot3^2\equiv9 \pmod{13}$

よって，3^{200} を 13 で割った余りは　9

17 次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。　961，217

解答　31

解説

$961=217\cdot4+93$

$217=93\cdot2+31$

$93=31\cdot3+0$

よって，最大公約数は　31

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3 & & 2 & & 4 \\ 31\,) & 93 &) & 217 &) & 961 \\ & 93 & & 186 & & 868 \\ \hline & 0 & & 31 & & 93 \end{array}$$

最大公約数

18 次の等式を満たす整数 x，y の組を互除法を用いて 1 つ求めよ。　$141x-52y=4$

解答　$x=-28$，$y=-76$

解説

141 と 52 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$141=52\cdot2+37$　　移項すると　$37=141-52\cdot2$

$52=37\cdot1+15$　　移項すると　$15=52-37\cdot1$

$37=15\cdot2+7$　　移項すると　$7=37-15\cdot2$

$15=7\cdot2+1$　　移項すると　$1=15-7\cdot2$

よって　$1=15-7\cdot2$

$=15-(37-15\cdot2)\cdot2$

$=15\cdot5+37\cdot(-2)$

$=(52-37\cdot1)\cdot5+37\cdot(-2)$

$=52\cdot5+37\cdot(-7)$

$=52\cdot5+(141-52\cdot2)\cdot(-7)$

$=141\cdot(-7)-52\cdot(-19)$

すなわち　$141\cdot(-7)-52\cdot(-19)=1$

両辺に 4 を掛けると

$141\cdot\{4\cdot(-7)\}-52\cdot\{4\cdot(-19)\}=4$

すなわち　$141\cdot(-28)-52\cdot(-76)=4$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=-28$，$y=-76$

19 次の方程式の整数解をすべて求めよ。　$13x+8y=7$

解答　k は整数とする。　$x=8k+3$，$y=-13k-4$

解説

$13x+8y=7$　…… ①

$x=3$，$y=-4$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$13\cdot3+8\cdot(-4)=7$　…… ②

① − ② から　$13(x-3)+8(y+4)=0$　…… ③

13 と 8 は互いに素であるから，③ より

$x-3=8k$，$y+4=-13k$　（k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=8k+3$，$y=-13k-4$　（k は整数）

20 13 で割ると 2 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3 桁で最大のものと最小のものを求めよ。

解答　最大のものと最小のものは順に　951，132

解説

求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$n=13x+2$，　$n=9y+6$

よって　$13x+2=9y+6$

すなわち　$13x-9y=4$　…… ①

$x=1$，$y=1$ は，① の整数解の 1 つであるから

$13\cdot1-9\cdot1=4$　…… ②

① − ② から　$13(x-1)-9(y-1)=0$　…… ③

13 と 9 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x-1=9k$　すなわち　$x=9k+1$　（k は整数）

と表される。　したがって　$n=13(9k+1)+2=117k+15$

$117k+15$ が 3 桁で最大となるのは，$k=8$ のときで　$n=117\cdot8+15=951$

$117k+15$ が 3 桁で最小となるのは，$k=1$ のときで　$n=117\cdot1+15=132$

21 次の分数を小数で表したとき，[　] 内の数字を求めよ。　$\dfrac{7}{13}$　[小数第 200 位]

解答　3

解説

$\dfrac{7}{13}$ を小数で表すと　$\dfrac{7}{13}=0.\dot{5}3846\dot{1}$

小数点以下で 538461 の 6 個の数字が循環する。

$200=6\cdot33+2$ であるから，小数第 200 位の数字は 538461 の 2 番目の数字で　3

22 次の数を 10 進法で表せ。　$3412_{(5)}$　解答　482

解説

$3412_{(5)}=3\cdot5^3+4\cdot5^2+1\cdot5^1+2\cdot5^0$

$=375+100+5+2=482$

23 次の 10 進数を [　] 内の表し方で表せ。　(1)　96　[3 進法]　　(2)　634　[7 進法]

解答　(1)　$10120_{(3)}$　　(2)　$1564_{(7)}$

解説

(1)　96 を 3 で割り，商を 3 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

余りを逆に並べて

$10120_{(3)}$

$$\begin{array}{rrl} 3\,) & 96 & \text{余り} \\ 3\,) & 32 & \cdots 0 \\ 3\,) & 10 & \cdots 2 \\ 3\,) & 3 & \cdots 1 \\ 3\,) & 1 & \cdots 0 \\ & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

(2)　634 を 7 で割り，商を 7 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

余りを逆に並べて

$1564_{(7)}$

$$\begin{array}{rrl} 7\,) & 634 & \text{余り} \\ 7\,) & 90 & \cdots 4 \\ 7\,) & 12 & \cdots 6 \\ 7\,) & 1 & \cdots 5 \\ & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

24 次の数を 10 進法の小数で表せ。　(1)　$0.111_{(2)}$　　(2)　$0.432_{(5)}$

解答　(1)　0.875　　(2)　0.936

解説

(1)　$0.111_{(2)}=1\cdot\dfrac{1}{2^1}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=0.875$　(2)　$0.432_{(5)}=4\cdot\dfrac{1}{5^1}+3\cdot\dfrac{1}{5^2}+2\cdot\dfrac{1}{5^3}=0.936$

25 次の計算の結果を，2 進法で表せ。

(1)　$11101_{(2)}\times101_{(2)}$　　(2)　$110111_{(2)}\div101_{(2)}$

解答　(1)　$10010001_{(2)}$　　(2)　$1011_{(2)}$

解説

(1)　$11101_{(2)}\times101_{(2)}=10010001_{(2)}$　　(2)　$110111_{(2)}\div101_{(2)}=1011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 11101 \\ 11101 \\ \hline 10010001 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 1011 \\ 101\,) & 110111 \\ & 101 \\ \hline & 111 \\ & 101 \\ \hline & 101 \\ & 101 \\ \hline & 0 \end{array}$$

26 次の 10 進数を [　] 内の表し方で表せ。　0.5625　[2 進法]

解答　$0.1001_{(2)}$

解説

0.5625 に 2 を掛け，小数部分に 2 を掛けることを繰り返すと右のようになる。

出てきた整数部分を順に並べて

$0.1001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 0.5625 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.1250 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0.250 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.0 \end{array}$$