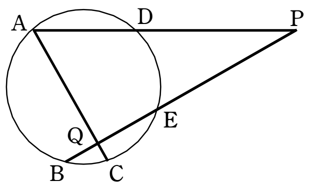
数学演習（平面図形）Ｈ２６．１２．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

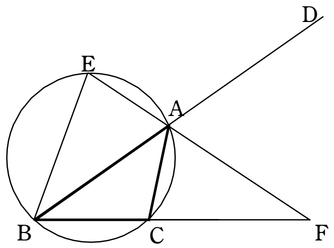
1．右の図で，$\angle APB=30^\circ$，$\angle PAC=60^\circ$，$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}$ は円周の $\dfrac{2}{3}$ である。

(1) $\overset{\frown}{CE}:\overset{\frown}{ED}$ を求めよ。

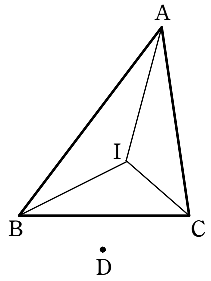
(2) $AQ=6$，$QC=1$ であるとき，線分 PD の長さを求めよ。



2．図のように，円に内接する $\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角 $\angle CAD$ の二等分線が円と再び交わる点を E，辺 BC の延長と交わる点を F とする。$AE=AC$ であるとき，$BE=CF$ であることを証明せよ。



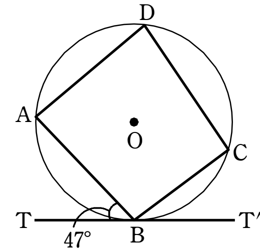
3．$\triangle ABC$ の内心を I とし，$\triangle IBC$ の外心を D とすると，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあることを証明せよ。



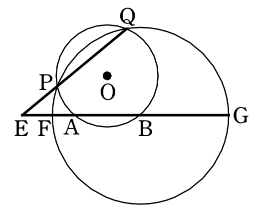
4．(1) $\triangle ABC$ の内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする。$AB=9$，$BC=10$，$CA=7$ のとき $AF+BD+CE$ の長さを求めよ。

(2) $AB=13$，$BC=5$，$CA=12$ である $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。

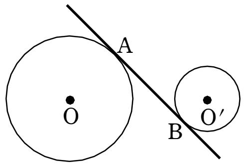
5．右の図で，四角形 ABCD は円 O に内接し，直線 TT′ は点 B で円 O に接している。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，$\angle TBA=47^\circ$ のとき $\angle BCD$，$\angle BAD$ の大きさを求めよ。



6．右の図のように，円 O は円 B と 2 点 P，Q で交わり，更に，円 B の直径 FG と点 A，中心 B で交わっている。また，E は直線 PQ と直線 FG の交点である。$EA=x$，$AB=a$，$BG=b$ とするとき，x を a，b を用いて表せ。

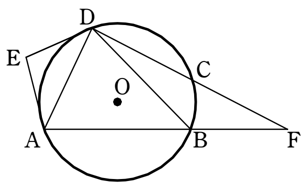


7．右の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O，O′ の半径を，それぞれ 4，2 とし，中心 O，O′ 間の距離を 8 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



8．右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の円周上の点で，E は点 A における接線と点 D における接線の交点，F は AB の延長と DC の延長の交点である。

AD＝DC，DB＝BF，$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}:\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1:2$ のとき，∠AED の大きさを求めよ。

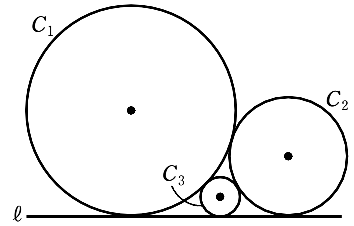


9．3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$，内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

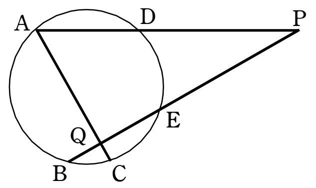
(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

10．平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。ℓ，C_1，C_2 で囲まれた部分に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。円 C_1，C_2 の半径をそれぞれ 16，9 とするとき，円 C_3 の半径を求めよ。



1．右の図で，$\angle APB=30^\circ$，$\angle PAC=60^\circ$，$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}$ は円周の $\dfrac{2}{3}$ である。



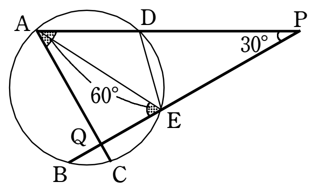
(1) $\overset{\frown}{CE}:\overset{\frown}{ED}$ を求めよ。

(2) $AQ=6$，$QC=1$ であるとき，線分 PD の長さを求めよ。

解答　(1)　1 : 1　　(2)　7

解説

(1) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}$ が円周の $\dfrac{2}{3}$ であるから



$$\angle AEB+\angle CAD=\frac{1}{2}\times\left(360^\circ\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=120^\circ$$

$\angle CAD=60^\circ$ であるから

$\angle AEB=60^\circ$

$\angle APE=30^\circ$ であるから

$\angle EAP=\angle AEB-\angle APE$

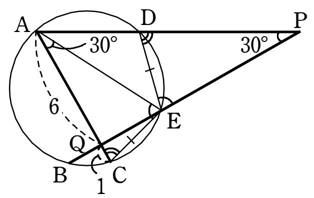
$=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

ゆえに　$\angle CAE=\angle CAD-\angle EAD$

$=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

よって　$\overset{\frown}{CE}:\overset{\frown}{ED}=\angle CAE:\angle EAD=1:1$

(2) △PDE と △ACE において



$\angle DPE=\angle CAE=30^\circ$

四角形 ACED は円に内接するから

$\angle PDE=\angle ACE$　……①

ゆえに　$\angle PED=\angle AEC$　……②

(1) より，$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{CE}$ であるから

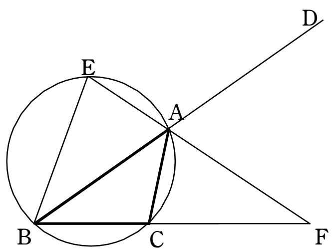
$ED=EC$　……③

①，②，③ から

△PDE≡△ACE

よって　$PD=AC=6+1=7$

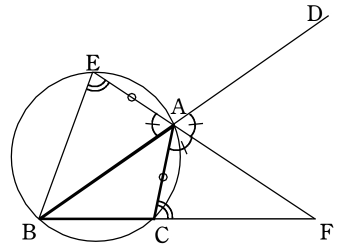
2．図のように，円に内接する △ABC の ∠A の外角 ∠CAD の二等分線が円と再び交わる点を E，辺 BC の延長と交わる点を F とする。AE＝AC であるとき，BE＝CF であることを証明せよ。



解答　略

解説

△BAE と △FAC において



$AE=AC$　……①

$\angle DAF=\angle FAC$，$\angle DAF=\angle BAE$

であるから　$\angle BAE=\angle FAC$　……②

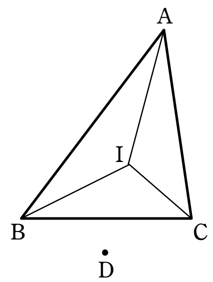
ここで，四角形 AEBC は円に内接しているから

$\angle AEB=\angle ACF$　……③

①，②，③ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから　△BAE≡△FAC

よって　$BE=CF$

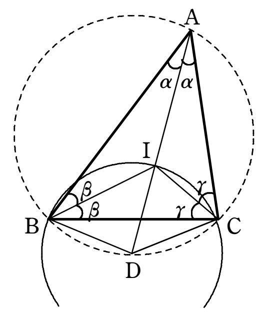
3．△ABC の内心を I とし，△IBC の外心を D とすると，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあることを証明せよ。



解答　略

解説

$\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，$\angle C=2\gamma$ とおく。



点 D は △IBC の外心であるから

$$\angle BIC=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle BDC)$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC\quad\cdots\cdots①$$

一方　$\angle BIC=(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)$

$=2\alpha+\beta+\gamma$　……②

①，② から

$$2\alpha+\beta+\gamma=180^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$$

両辺を 2 倍して

$4\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ-\angle BDC$

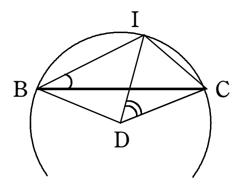
$2\alpha+(2\alpha+2\beta+2\gamma)=360^\circ-\angle BDC$

$2\alpha+180^\circ=360^\circ-\angle BDC$

よって　$2\alpha+\angle BDC=180^\circ$

ゆえに，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

別解　△IBC の外接円において，円周角の定理により



$\angle IDC=2\angle IBC=2\beta$

同様に　$\angle IDB=2\gamma$

よって　$\angle BDC=2\beta+2\gamma$

ゆえに，四角形 ABCD において

$\angle A+\angle D=2\alpha+(2\beta+2\gamma)=180^\circ$

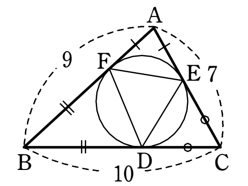
4．(1)　△ABC の内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする。$AB=9$，$BC=10$，$CA=7$ のとき $AF+BD+CE$ の長さを求めよ。

(2)　$AB=13$，$BC=5$，$CA=12$ である △ABC の内接円の半径を求めよ。

解答　(1)　13　　(2)　2

解説

(1)　$AE=AF$，$BF=BD$，$CD=CE$ であるから



$AB+BC+CA$

$=AF+FB+BD+DC+CE+EA$

$=2AF+2BD+2CE$

$=2(AF+BD+CE)$

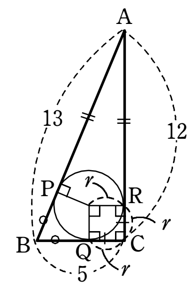
ここで，$AB=9$，$BC=10$，$CA=7$ であるから

$AB+BC+CA=9+10+7=26$

よって　$2(AF+BD+CE)=26$

ゆえに　$AF+BD+CE=13$

(2)　$AB^2=169$，$BC^2=25$，$CA^2=144$ であるから



$AB^2=BC^2+CA^2$

よって，△ABC は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形である。

内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。

内接円の半径を r とすると

$AP=AR=12-r$，$BP=BQ=5-r$

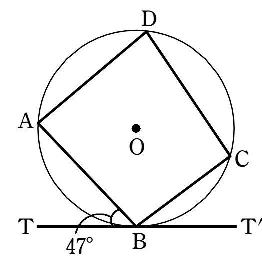
$AP+BP=AB$ であるから

$(12-r)+(5-r)=13$

ゆえに　$r=2$

よって，△ABC の内接円の半径は　2

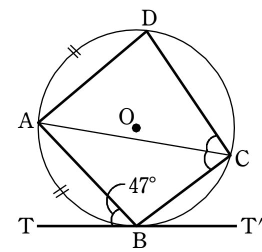
5．右の図で，四角形 ABCD は円 O に内接し，直線 TT′ は点 B で円 O に接している。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，$\angle TBA=47^\circ$ のとき ∠BCD，∠BAD の大きさを求めよ。



解答　順に 94°，86°

解説

直線 TT′ は円 O の接線であるから



$\angle ACB=\angle TBA=47^\circ$

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}$ であるから

$\angle ACD=\angle ACB=47^\circ$

よって　$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD$

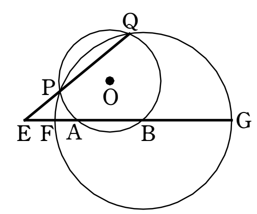
$=47^\circ+47^\circ=94^\circ$

四角形 ABCD は円 O に内接しているから

$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

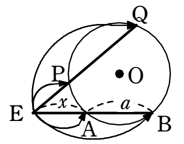
ゆえに　$\angle BAD=180^\circ-\angle BCD=180^\circ-94^\circ=86^\circ$

6．右の図のように，円 O は円 B と 2 点 P，Q で交わり，更に，円 B の直径 FG と点 A，中心 B で交わっている。また，E は直線 PQ と直線 FG の交点である。$EA=x$，$AB=a$，$BG=b$ とするとき，x を a，b を用いて表せ。



解答　$x=\dfrac{b^2-a^2}{a}$

解説



円 O について，方べきの定理から

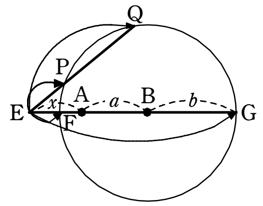
$$\mathrm{EP}\cdot\mathrm{EQ}=\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}$$

円 B について，方べきの定理から

$$\mathrm{EP}\cdot\mathrm{EQ}=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG}$$

よって　$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG}$

$\mathrm{EA}=x$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BG}=b$ より　$\mathrm{FB}=b$ であるから



$$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=x(x+a)$$

$$\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG}=(\mathrm{EB}-\mathrm{FB})\cdot\mathrm{EG}$$

$$=(x+a-b)(x+a+b)$$

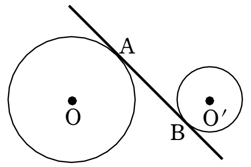
ゆえに　$x(x+a)=(x+a-b)(x+a+b)$

よって　$x^2+ax=x^2+2ax+a^2-b^2$

ゆえに　$ax=b^2-a^2$

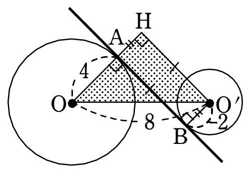
よって　$x=\dfrac{b^2-a^2}{a}$

7．右の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O，O′ の半径を，それぞれ 4，2 とし，中心 O，O′ 間の距離を 8 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



解答　$2\sqrt{7}$

解説



直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線であるから

$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{AB},\ \mathrm{O'B}\perp\mathrm{AB}$$

ゆえに，点 O′ から直線 OA に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となる。

よって　$\mathrm{AB}=\mathrm{HO'}$，$\mathrm{AH}=\mathrm{BO'}=2$

ゆえに　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}+\mathrm{AH}=4+2=6$

△OO′H に三平方の定理を適用すると

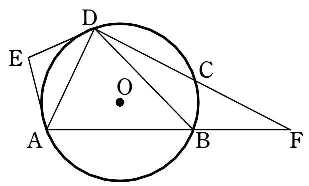
$$\mathrm{O'H}=\sqrt{8^2-6^2}$$

$$=2\sqrt{7}$$

よって　$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$

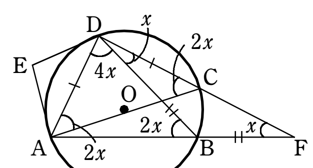
8．右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の円周上の点で，E は点 A における接線と点 D における接線の交点，F は AB の延長と DC の延長の交点である。

$\mathrm{AD}=\mathrm{DC}$，$\mathrm{DB}=\mathrm{BF}$，$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}:\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1:2$ のとき，∠AED の大きさを求めよ。



解答　100°

解説



$\angle\mathrm{BFC}=x$ とすると，$\mathrm{DB}=\mathrm{BF}$ であるから

$$\angle\mathrm{BDF}=\angle\mathrm{BFD}=x$$

$$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BFD}+\angle\mathrm{BDF}=2x$$

$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}:\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1:2$ であるから

$$\angle\mathrm{ADB}=2\angle\mathrm{ABD}=4x$$

また，$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角として

$$\angle\mathrm{DCA}=\angle\mathrm{DBA}=2x$$

更に，$\mathrm{AD}=\mathrm{DC}$ であるから

$$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DCA}=2x$$

よって，△DAC の内角の和を考えて

$$\angle\mathrm{D}+\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=(4x+x)+2x+2x$$

$$=9x=180^\circ$$

ゆえに　$x=20^\circ$

直線 ED は円の接線であるから

$$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ABD}=2x=40^\circ$$

$\mathrm{EA}=\mathrm{ED}$ であるから

$$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{EDA}=40^\circ$$

△EAD の内角の和を考えて

$$\angle\mathrm{E}+\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{D}=\angle\mathrm{AED}+40^\circ+40^\circ$$

$$=180^\circ$$

よって　$\angle\mathrm{AED}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

9．3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\dfrac{3}{2}$，内接円の半径が $\dfrac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a\geqq b\geqq c$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

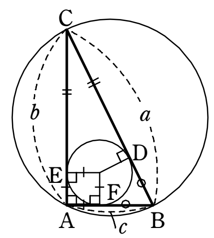
解答　(1)　$a=3$　　(2)　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)　$a\geqq b\geqq c$ であるから，直角三角形の斜辺の長さは a である。直角三角形の斜辺の長さは外接円の直径の長さと等しいから

$$a=2\times\frac{3}{2}=3$$

(2)　題意の直角三角形を右の図のように △ABC と表し，内接円との接点を D，E，F と定める。



$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{AF}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}=c-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=b-\frac{1}{2}$$

$\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}$ であるから　$\left(c-\dfrac{1}{2}\right)+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)=3$

よって　$b+c=4$　……①

また，三平方の定理により　$b^2+c^2=3^2$　……②

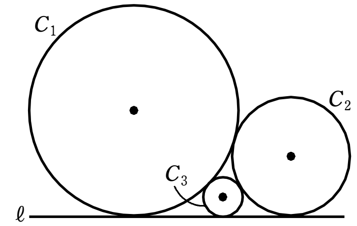
①，② から，c を消去して　$2b^2-8b+7=0$

よって　$b=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$c=\dfrac{4\mp\sqrt{2}}{2}$ (複号同順)

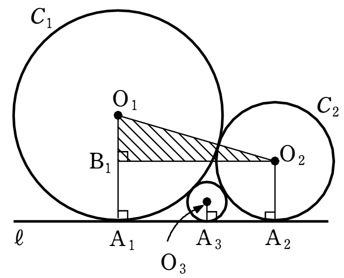
$b\geqq c$ であるから　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

10．平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。ℓ，C_1，C_2 で囲まれた部分に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。円 C_1，C_2 の半径をそれぞれ 16，9 とするとき，円 C_3 の半径を求めよ。



解答　$\dfrac{144}{49}$

解説



円 C_1，C_2，C_3 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$ とし，円 $\mathrm{O_3}$ の半径を r とする。

また，円 C_1，C_2，C_3 と直線 ℓ との接点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$ とする。

直線 ℓ は円 C_1，C_2 の接線であるから

$$\mathrm{O_1A_1}\perp\ell,\ \mathrm{O_2A_2}\perp\ell$$

よって，$\mathrm{O_2}$ から 直線 $\mathrm{O_1A_1}$ に垂線 $\mathrm{O_2B_1}$ を下ろすと，四角形 $\mathrm{A_1A_2O_2B_1}$ は長方形となる。

ゆえに　$\mathrm{O_1B_1}=\mathrm{O_1A_1}-\mathrm{B_1A_1}$

$$=\mathrm{O_1A_1}-\mathrm{O_2A_2}$$

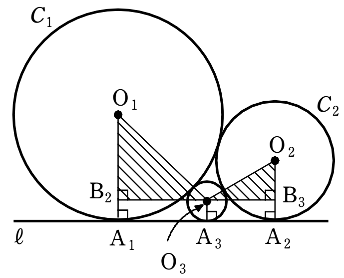
$$=16-9=7$$

$\triangle\mathrm{O_1O_2B_1}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{O_2B_1}=\sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2-\mathrm{O_1B_1}^2}$$

$$=\sqrt{(16+9)^2-7^2}$$

$$=24\quad\cdots\cdots①$$



また，$\mathrm{O_3}$ から 直線 $\mathrm{O_1A_1}$ に垂線 $\mathrm{O_3B_2}$ を下ろすと，$\triangle\mathrm{O_1O_3B_2}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{O_3B_2}=\sqrt{\mathrm{O_1O_3}^2-\mathrm{O_1B_2}^2}$$

$$=\sqrt{(16+r)^2-(16-r)^2}$$

$$=\sqrt{64r}$$

$$=8\sqrt{r}\quad\cdots\cdots②$$

同様に，$\mathrm{O_3}$ から直線 $\mathrm{O_2A_2}$ に垂線 $\mathrm{O_3B_3}$ を下ろすと，$\triangle\mathrm{O_2O_3B_3}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{O_3B_3}=\sqrt{\mathrm{O_3O_2}^2-\mathrm{O_2B_3}^2}$$

$$=\sqrt{(9+r)^2-(9-r)^2}$$

$$=\sqrt{36r}$$

$$=6\sqrt{r}\quad\cdots\cdots③$$

ここで，$\mathrm{O_2B_1}=\mathrm{A_1A_2}$，$\mathrm{O_3B_2}+\mathrm{O_3B_3}=\mathrm{B_2B_3}=\mathrm{A_1A_2}$ であるから

$$\mathrm{O_2B_1}=\mathrm{O_3B_2}+\mathrm{O_3B_3}\quad\cdots\cdots④$$

①，②，③ を ④ に代入して

$$24=8\sqrt{r}+6\sqrt{r}$$

よって　$\sqrt{r}=\dfrac{12}{7}$　　　ゆえに　$r=\dfrac{144}{49}$