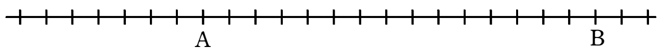
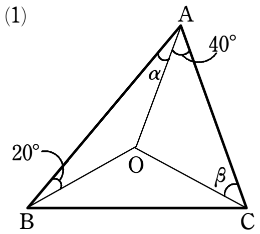
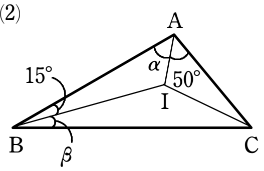
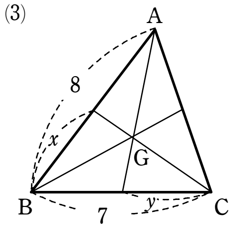
１．線分 AB を 1 : 4 に内分する点 P と外分する点 Q を下の図に記入せよ。



２．△ABC の外心を O，内心を I，重心を G とする。下の図の角 α，β と線分の長さ x，y を求めよ。

⑴


⑵


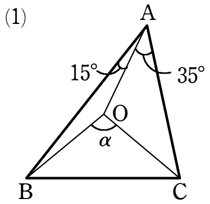
⑶


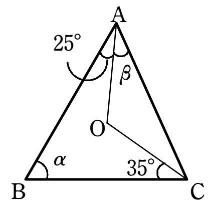
３．⑴　AB＝8，BC＝3，CA＝6 である △ABC において，∠A の外角の二等分線が直線 BC と交わる点を D とする。線分 CD の長さを求めよ。

⑵　△ABC において，BC＝5，CA＝3，AB＝7 とする。∠A およびその外角の二等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D，E とするとき，線分 DE の長さを求めよ。

４．△ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE∥BC であることを証明せよ。

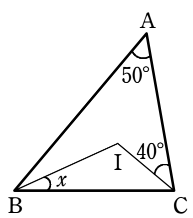
５．△ABC の外心を O とする。
右の図の角 α，β を求めよ。

⑴


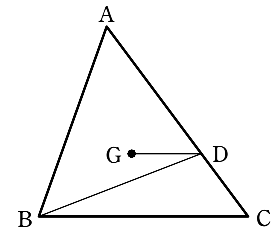
⑵


６．外心と垂心が一致する △ABC は正三角形であることを証明せよ。

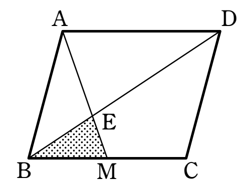
７．△ABC の内心を I とする。
⑴　右の図の角 x を求めよ。
⑵　直線 BI と辺 AC の交点を E とする。AB＝8，BC＝7，AC＝4 であるとき，BI : IE を求めよ。



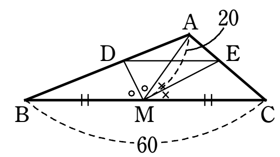
８．右の図の △ABC において，G は △ABC の重心で線分 GD は辺 BC と平行である。
このとき，△DBC と △ABC の面積比を求めよ。



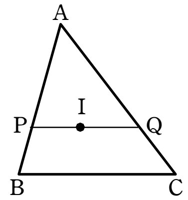
９．平行四辺形 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を E とする。
このとき，△BME の面積と平行四辺形 ABCD の面積の比を求めよ。



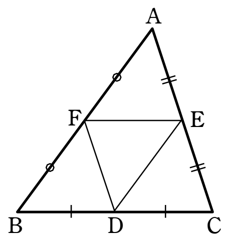
10．△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点を D，E とする。
このとき，DE の長さを求めよ。ただし，BC＝60，AM＝20 とする。



11. 図の △ABC において，AB＝8，BC＝10，CA＝12 とし，△ABC の内接円の中心を I とする。I を通り辺 BC に平行な直線が，辺 AB，辺 AC と交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ。



12. △ABC の辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ D，E，F とすると，△ABC と △DEF の重心が一致することを証明せよ。

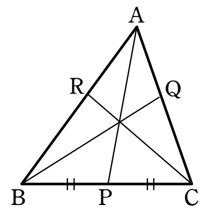


13. △ABC の辺 BC，CA，AB を 4 : 3 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする。△ABC と △DEF の面積比を求めよ。

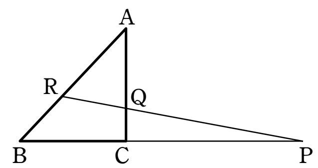
14. (1)　△ABC の内心を I とする。このとき，△ABI : △BCI : △CAI の比を求めよ。

(2)　△ABC の内部に 1 点 P がある。△ABP＝△BCP＝△CAP の場合，P は △ABC のどのような点か。

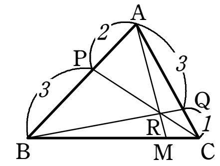
15. 右の図において，AR : RB＝3 : 4，BP＝PC のとき AQ : QC を求めよ。



16. 右の図において，AR : RB＝3 : 2，BP : CP＝5 : 3 のとき CQ : QA を求めよ。



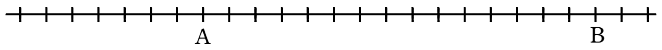
17. △ABC で辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を Q，線分 BQ と CP の交点を R とする。直線 AR と辺 BC の交点を M とし，BC＝22 であるとき，BM の長さを求めよ。



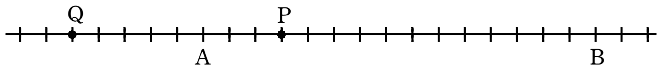
18. 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を 1 : 2 に内分する点を D，CA を 1 : 2 に内分する点を E，AB を 1 : 2 に内分する点を F とし，更に BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。

数学演習（平面図形）Ｈ２６．１２．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

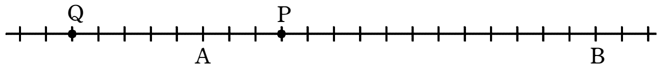
1．線分 AB を 1 : 4 に内分する点 P と外分する点 Q を下の図に記入せよ。



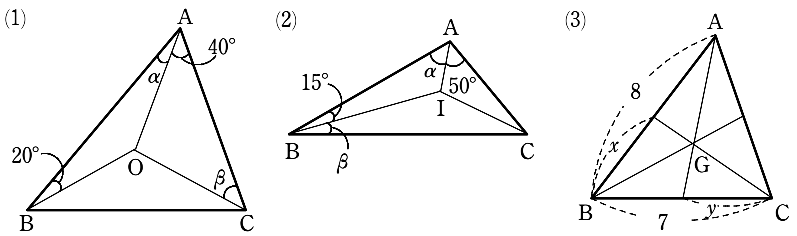
解答



解説



2．△ABC の外心を O，内心を I，重心を G とする。下の図の角 α，β と線分の長さ x，y を求めよ。

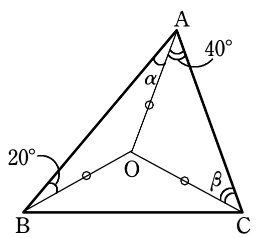


解答　(1)　$\alpha=20°$，$\beta=40°$　　(2)　$\alpha=50°$，$\beta=15°$　　(3)　$x=4$，$y=\dfrac{7}{2}$

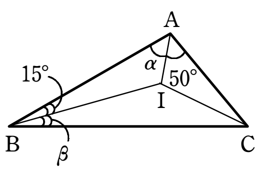
解説

(1)　点 O は △ABC の 3 つの頂点からの距離が等しいから　　$OA=OB=OC$

よって　　$\alpha=20°$，$\beta=40°$

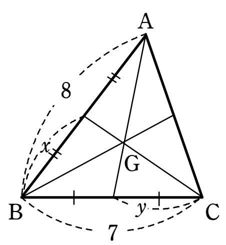


(2)　点 I は △ABC の 3 つの内角の二等分線上にあるから　　$\alpha=50°$，$\beta=15°$



(3)　点 G は △ABC の 3 つの中線の交点であるから

$x=4$，$y=\dfrac{7}{2}$



3．(1)　AB＝8，BC＝3，CA＝6 である △ABC において，∠A の外角の二等分線が直線 BC と交わる点を D とする。線分 CD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，BC＝5，CA＝3，AB＝7 とする。∠A およびその外角の二等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D，E とするとき，線分 DE の長さを求めよ。

解答　(1)　9　　(2)　$\dfrac{21}{4}$

解説

(1)　点 D は辺 BC を AB : AC に外分するから

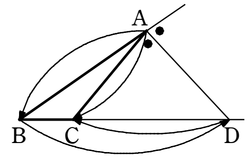
$BD : DC=AB : AC=8 : 6=4 : 3$

ゆえに　　$CD=3BC=9$

別解　(BD : DC＝4 : 3 までは同様。)

よって　　$4DC=3BD=3(BC+CD)=9+3CD$

ゆえに　　$CD=9$



(2)　点 D は辺 BC を AB : AC に内分するから

$BD : DC=AB : AC=7 : 3$

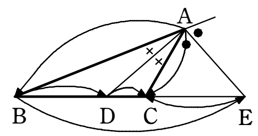
ゆえに　　$DC=\dfrac{3}{7+3}\times BC=\dfrac{3}{2}$

また，点 E は辺 BC を AB : AC に外分するから

$BE : EC=AB : AC=7 : 3$

ゆえに　　$CE=\dfrac{3}{4}\times BC=\dfrac{15}{4}$

よって　　$DE=DC+CE=\dfrac{3}{2}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{21}{4}$



4．△ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE∥BC であることを証明せよ。

解答　略

解説

△MAB において，直線 MD は ∠M の二等分線であるから

$AD : DB=MA : MB$　…… ①

△MCA において，直線 ME は ∠M の二等分線であるから

$AE : EC=MA : MC$　…… ②

M は辺 BC の中点であるから

$MB=MC$　…… ③

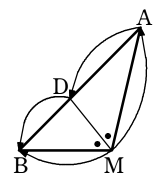
①，③ から

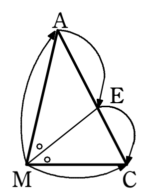
$AD : DB=MA : MC$　…… ④

②，④ から

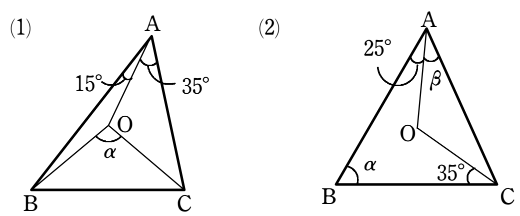
$AD : DB=AE : EC$

よって，平行線と線分の比の性質から　　DE∥BC





5．△ABC の外心を O とする。
右の図の角 α，β を求めよ。



解答　(1)　$\alpha=100°$　　(2)　$\alpha=60°$，$\beta=30°$

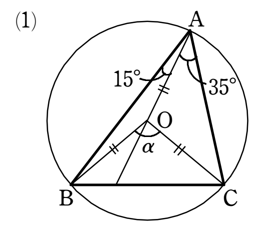
解説

(1)　$\alpha=2\angle BAC=2(15°+35°)=100°$

別解　$\angle OBA=\angle OAB=15°$，

$\angle OCA=\angle OAC=35°$ から

$\alpha=15°\times2+35°\times2=100°$



(2)　$\angle OBA=\angle OAB=25°$

$\angle OBC=\angle OCB=35°$

よって　　$\alpha=25°+35°=60°$

また　　$\angle OCA=\angle OAC=\beta$

$(25°+\beta)+60°+(35°+\beta)=180°$

したがって　　$\beta=30°$

別解　(β を求める別解)　　$180°-2\beta=2\alpha=120°$

よって　　$\beta=\dfrac{180°-120°}{2}=30°$

6．外心と垂心が一致する △ABC は正三角形であることを証明せよ。

解答　略

解説

△ABC の外心を O とすると

$OB=OC$　…… ①

また，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AD とする。

点 O は，条件より △ABC の垂心でもあるから，点 O は AD 上にある。

よって　　$OD\perp BC$　…… ②

①，② から，点 D は辺 BC の中点である。

ゆえに，頂点 A は辺 BC の垂直二等分線上にある。

よって　　$AB=AC$　…… ③

また，頂点 B から辺 CA に下ろした垂線を BE とすると，同様にして

$OC=OA$

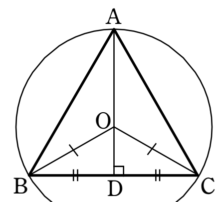
$OE\perp CA$

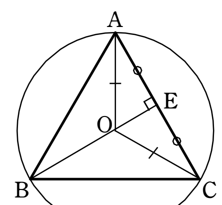
よって，点 E は辺 CA の中点であり，頂点 B は辺 CA の垂直二等分線上にある。

ゆえに　　$BC=BA$　…… ④

③，④ から　　$AB=BC=CA$

したがって，△ABC は正三角形である。

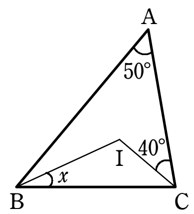




7．△ABC の内心を I とする。

(1)　右の図の角 x を求めよ。

(2)　直線 BI と辺 AC の交点を E とする。AB＝8，BC＝7，AC＝4 であるとき，BI : IE を求めよ。



解答　(1)　$x=25°$　　(2)　15 : 4

解説

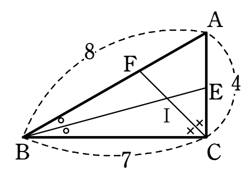
(1)　$\angle ICB=\angle ICA=40°$，$\angle IBA=\angle IBC=x$

三角形の内角の和は 180° であるから

$2x+50°+40°\times2=180°$

よって　　$x=25°$

(2)　△ABC において，直線 BE は ∠B の二等分線であるから

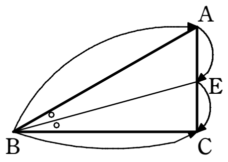


$AE : EC = BA : BC$

$= 8 : 7$

よって　$AE = \dfrac{8}{8+7}AC$

$= \dfrac{32}{15}$

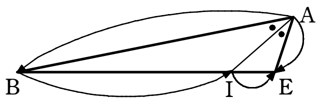


△ABE において，直線 AI は ∠A の二等分線であるから

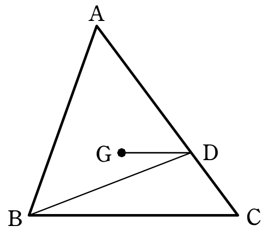
$BI : IE = AB : AE$

$= 8 : \dfrac{32}{15}$

$= 15 : 4$



8．右の図の △ABC において，G は △ABC の重心で線分 GD は辺 BC と平行である。
このとき，△DBC と △ABC の面積比を求めよ。



解答　1 : 3

解説

直線 AG と辺 BC の交点を E とする。

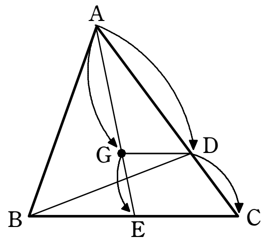
GD∥EC であり，G は △ABC の重心であるから

$AD : DC = AG : GE = 2 : 1$

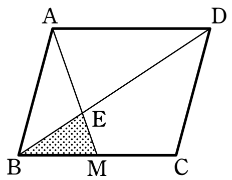
このとき

$\triangle DBC : \triangle ABC = DC : AC$

$= 1 : 3$



9．平行四辺形 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を E とする。
このとき，△BME の面積と平行四辺形 ABCD の面積の比を求めよ。



解答　1 : 12

解説

線分 AC，BD の交点を F とする。

△ABC において，点 E は中線 AM，BF の交点であるから，重心である。

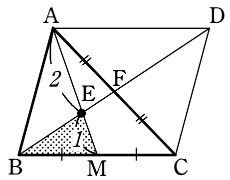
よって　　$AE : EM = 2 : 1$

したがって　$\triangle BME = \dfrac{1}{3}\triangle BMA$

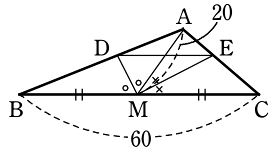
$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}▱ABCD = \dfrac{1}{12}▱ABCD$

ゆえに　　$\triangle BME : ▱ABCD = 1 : 12$



10．△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点を D，E とする。
このとき，DE の長さを求めよ。ただし，BC＝60，AM＝20 とする。



解答　24

解説

MD は ∠AMB の二等分線であるから

$AD : DB = MA : MB$

$= 20 : \dfrac{60}{2}$

$= 2 : 3$　……①

同様に，ME は ∠AMC の二等分線であるから

$AE : EC = MA : MC$

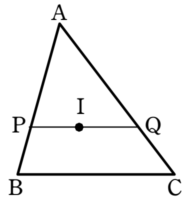
$= 2 : 3$　……②

①，② から　　DE∥BC

ゆえに　　$DE : BC = AD : AB = 2 : (2+3) = 2 : 5$

よって　　$DE = \dfrac{2}{5}BC = \dfrac{2}{5} \cdot 60 = 24$

11．図の △ABC において，AB＝8，BC＝10，CA＝12 とし，△ABC の内接円の中心を I とする。I を通り辺 BC に平行な直線が，辺 AB，辺 AC と交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ。



解答　$\dfrac{20}{3}$

解説

BC∥PQ であるから

$\angle PIB = \angle IBC$

また，I は △ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle PBI$

よって　　$\angle PIB = \angle PBI$

ゆえに　　$PI = PB$　……①

同様にして　$QI = QC$　……②

①，② から

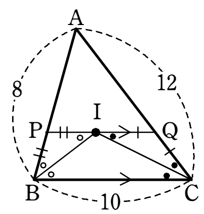
$(\triangle APQ \text{ の周}) = AB + AC$

$= 8 + 12$

$= 20$

$(\triangle ABC \text{ の周}) = 8 + 10 + 12$

$= 30$

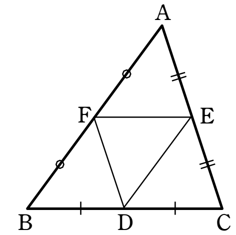


△APQ∽△ABC であり，相似比は周の比であるから　　$PQ : BC = 2 : 3$

よって，$PQ : 10 = 2 : 3$ から

$PQ = \dfrac{20}{3}$

12．△ABC の辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ D，E，F とすると，△ABC と △DEF の重心が一致することを証明せよ。



解答　略

解説

AD と FE の交点を L，CF と DE の交点を M とし，△ABC の重心を G とする。

△ABC において，中点連結定理を適用して

DF∥CA，ED∥AB

よって，四角形 AFDE は平行四辺形であるから

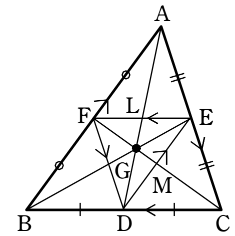
$FL = LE$

ゆえに，DL は △DEF の中線である。　……①

同様に，FE∥BC，DF∥CA であるから，四角形 FDCE は平行四辺形である。

よって　　$DM = ME$

ゆえに，FM は △DEF の中線である。　……②



①，② より，△DEF において，G は中線 DL，FM の交点であるから △DEF の重心である。

よって，△ABC と △DEF の重心は一致する。

13．△ABC の辺 BC，CA，AB を 4 : 3 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする。
△ABC と △DEF の面積比を求めよ。

解答　49 : 13

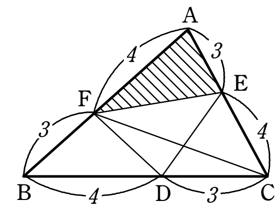
解説

AE : EC＝3 : 4 であるから

$\triangle AFE = \dfrac{3}{7}\triangle AFC$　……①

また，AF : FB＝4 : 3 であるから

$\triangle AFC = \dfrac{4}{7}\triangle ABC$　……②



② を ① に代入して

$\triangle AFE = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{4}{7}\triangle ABC = \dfrac{12}{49}\triangle ABC$

同様に

$\triangle BDF = \dfrac{3}{7}\triangle BDA = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{4}{7}\triangle BCA = \dfrac{12}{49}\triangle ABC$

$\triangle CED = \dfrac{3}{7}\triangle CEB = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{4}{7}\triangle CAB = \dfrac{12}{49}\triangle ABC$

が成り立つ。

よって　　$\triangle DEF = \triangle ABC - (\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED)$

$= \triangle ABC - 3 \times \left(\dfrac{12}{49}\triangle ABC\right)$

$= \dfrac{13}{49}\triangle ABC$

ゆえに　　$\triangle ABC : \triangle DEF = 49 : 13$

14．(1)　△ABC の内心を I とする。このとき，△ABI : △BCI : △CAI の比を求めよ。

(2)　△ABC の内部に 1 点 P がある。△ABP＝△BCP＝△CAP の場合，P は △ABC のどのような点か。

解答　(1)　AB : BC : CA　　(2)　重心

解説

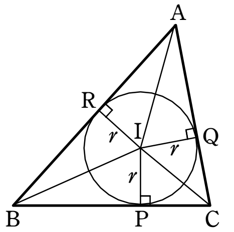
(1)　点 I から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線を IP，IQ，IR とする。

I は △ABC の内心であるから，内接円の半径を r とすると　IP＝IQ＝IR＝r

ゆえに　△ABI : △BCI : △CAI

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{IR} : \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{IP} : \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{IQ}$$

$$=\frac{r}{2}\mathrm{AB} : \frac{r}{2}\mathrm{BC} : \frac{r}{2}\mathrm{CA}=\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA}$$



別解　AI と BC の交点を D，BI と CA の交点を E とする。

このとき　△ABI : △CAI＝△IBD : △IDC

＝BD : DC

AD は ∠A の二等分線であるから

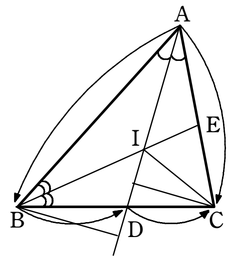
BD : DC＝AB : AC

ゆえに　△ABI : △CAI＝AB : AC　……①

同様に考えて

△ABI : △BCI＝BA : BC　……②

①，② から　　△ABI : △BCI : △CAI＝AB : BC : CA



(2)　AP と BC の交点を D，BP と CA の交点を E とする。

△ABP＝△CAP であるから，それぞれの三角形の底辺を AP と考えると

BD＝DC

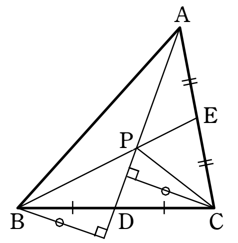
すなわち，AD は △ABC の中線である。　……①

同様に考えて，△ABP＝△BCP であるから

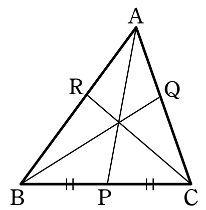
AE＝EC

すなわち，BE は △ABC の中線である。　……②

①，② から，P は △ABC の重心である。



15. 右の図において，AR : RB＝3 : 4，BP＝PC のとき AQ : QC を求めよ。



解答　3 : 4

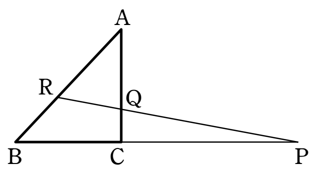
解説

チェバの定理により　$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

よって　$\frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{3}{4}=1$　　ゆえに　$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{4}{3}$

よって　AQ : QC＝3 : 4

16. 右の図において，AR : RB＝3 : 2，BP : CP＝5 : 3 のとき CQ : QA を求めよ。



解答　2 : 5

解説

メネラウスの定理により

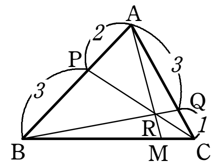
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって　$\frac{5}{3}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{3}{2}=1$

ゆえに　$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

よって　CQ : QA＝2 : 5

17. △ABC で辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を Q，線分 BQ と CP の交点を R とする。直線 AR と辺 BC の交点を M とし，BC＝22 であるとき，BM の長さを求めよ。



解答　18

解説

BM＝x とすると　　MC＝22－x

チェバの定理により　$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=1$

よって　$\frac{x}{22-x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=1$　　ゆえに　$x=18$　　すなわち　BM＝18

18. 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を 1 : 2 に内分する点を D，CA を 1 : 2 に内分する点を E，AB を 1 : 2 に内分する点を F とし，更に BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{3}}{28}$

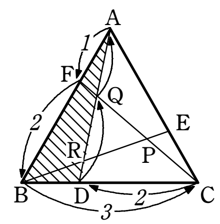
解説

△ABD と直線 CF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

よって　$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QA}}=1$

ゆえに　DQ : QA＝4 : 3　……①



△ADC と直線 BE にメネラウスの定理を用いると

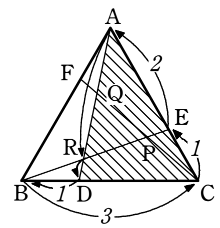
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

よって　$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$

ゆえに　AR : RD＝6 : 1　……②

①，② から　　AQ : QR : RD＝3 : 3 : 1

同様にして　　CP : PQ : QF＝3 : 3 : 1

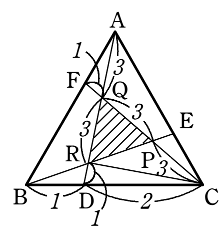


よって　△PQR＝$\frac{1}{2}$△CQR＝$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$△CAD

＝$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}$△ABC＝$\frac{1}{7}$△ABC

△ABC＝$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから

△PQR＝$\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{28}$



別解　(① を導くまでは同じ)

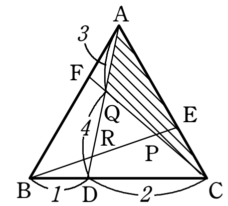
① から

△AQC＝$\frac{3}{7}$△ADC＝$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}$△ABC＝$\frac{2}{7}$△ABC

同様にして

△BRA＝$\frac{3}{7}$△BEA＝$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}$△BCA＝$\frac{2}{7}$△ABC

△CPB＝$\frac{3}{7}$△CFB＝$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}$△CAB＝$\frac{2}{7}$△ABC



よって　△PQR＝△ABC－(△AQC＋△BRA＋△CPB)

＝△ABC－3·$\frac{2}{7}$△ABC＝$\frac{1}{7}$△ABC

△ABC＝$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから　　△PQR＝$\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{28}$