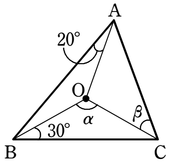
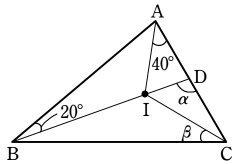
数学演習（平面図形）Ｈ２０．２．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．△ABC の外心を O，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。

(1)

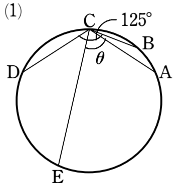


(2)



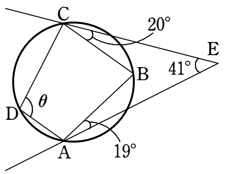
２．下の図において，角 θ を求めよ。

(1)

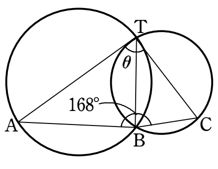


$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DE}$
$= 1 : 2 : 3 : 4$

(2)

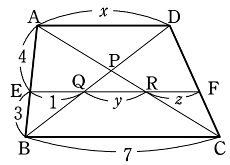


(3)



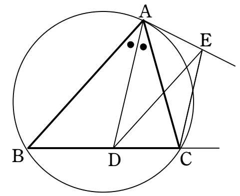
AT，CT は接線

３．右の図において，AD∥EF∥BC のとき，$x : y : z$ を最も簡単な整数の比で表せ。



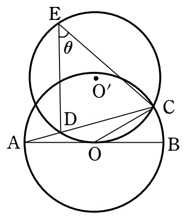
４．AB＝6，BC＝7，CA＝5 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D，∠B の 二等分線と線分 AD の交点を E とするとき，AE : ED を最も簡単な整数の比で表せ。

５．△ABC の ∠A の二等分線が BC と D で交わるとき，A において外接円に接線を引き，これと C を通り AD に平行な直線との交点を E とする。
∠A＝58°，∠B＝48°であるとき，∠CDE の大きさを求めよ。

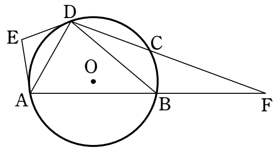


６．四角形 ABCD が円に内接しており，AC と BD の交点を E とする。AC＝AD，$\overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} = 2 : 3$，∠ACD＝75° であるとき，∠AEB の大きさを求めよ。

7．右の図のように，円 O の直径 AB と円 O′ が点 O で接し，円 O と円 O′ の交点を C，直線 AC と円 O′ の交点を D とする。∠CAO＝15° のとき，角 θ を求めよ。



8．右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の円周上の点で，E は点 A における接線と点 D における接線の交点，F は AB の延長と DC の延長の交点である。



また，AD＝DC，DB＝BF，$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}:\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1:2$ である。

(1)　∠AFD の大きさを求めよ。

(2)　∠AED の大きさを求めよ。

(3)　BF＝6 であるとき，この円の半径を求めよ。

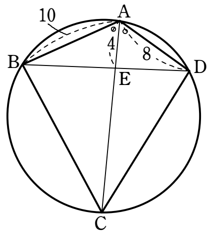
9．面積が 1 である △ABC において，辺 BC，CA，AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，線分 AL と BM，BM と CN，CN と AL の交点をそれぞれ P，Q，R とするとき，△PQR の面積を求めよ。

10．右の図のように円に内接する四角形 ABCD があり，AB＝10，AD＝8，∠BAC＝∠DAC である。
また，AC と BD の交点を E とし，AE＝4 である。

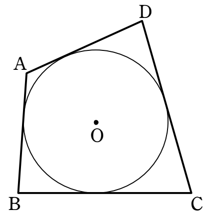
(1)　AC の長さを求めよ。

(2)　BE : ED を最も簡単な整数の比で表せ。

(3)　BD の長さを求めよ。



11．右の図のように，四角形 ABCD に円 O が内接している。AB＝a，BC＝b，CD＝c のとき，AD の長さを，a，b，c を用いて表せ。

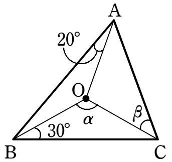


12．△ABC は直角三角形で，外心が内接円の周上にある。内接円の半径を 1 として外接円の半径を求めよ。

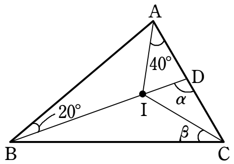
数学演習（平面図形）Ｈ２０．２．２７解答　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．△ABC の外心を O，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$\alpha=120°$，$\beta=40°$　　(2)　$\alpha=100°$，$\beta=30°$

(1)　OB＝OC から　$\angle OCB=\angle OBC=30°$

△OBC において，内角の和は 180° であるから　$\alpha+30°\times 2=180°$

よって　$\alpha=120°$

また，OA＝OB＝OC から　$\angle OBA=\angle OAB=20°$，$\angle OAC=\angle OCA=\beta$

△ABC において，内角の和は 180° であるから　$20°\times 2+30°\times 2+\beta\times 2=180°$

よって　$\beta=40°$

(2)　I は △ABC の内心であるから

$\angle BAD=2\cdot 40°=80°$，　$\angle ABC=2\cdot 20°=40°$，　$\angle ACB=2\beta$

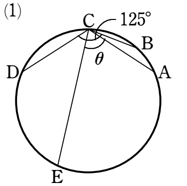
$\angle BDC=\angle BAD+\angle ABD$ であるから　$\alpha=80°+20°=100°$

また，△ABC の内角の和は 180° であるから　$80°+40°+2\beta=180°$

よって　$\beta=30°$

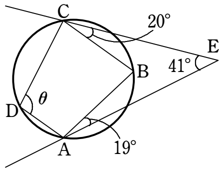
2．下の図において，角 θ を求めよ。

(1)

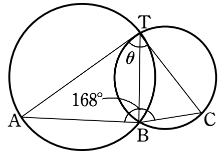


$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DE}$
$=1:2:3:4$

(2)



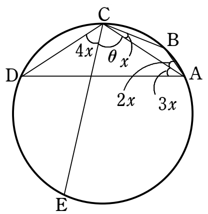
(3)



AT，CT は接線

解答　(1)　$\theta=70°$　　(2)　$\theta=100°$　　(3)　$\theta=96°$

(1)　A と B，A と D を結ぶ。



$\angle ACB=x$ とおくと，条件から

$\angle BAC=2x$，$\angle CAD=3x$，$\angle DCE=4x$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle BAD+\angle BCD=180°$

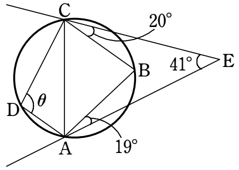
すなわち　$5x+125°=180°$

よって　$x=11°$

ゆえに　$\theta=125°-(x+4x)=125°-5x$

$=125°-55°=70°$

(2)　A と C を結ぶ。



△AEC の内角の和は 180° であるから

$41°+20°+\angle BCA+\angle BAC+19°=180°$

よって　$\angle BCA+\angle BAC=100°$

ゆえに，△ABC において

$\angle ABC=180°-(\angle BCA+\angle BAC)$

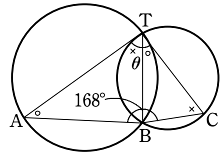
$=180°-100°=80°$

四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle ADC+\angle ABC=180°$

すなわち　$\theta+80°=180°$

よって　$\theta=100°$

(3)　接線と弦の作る角の定理により



$\angle BTC=\angle TAB$

$\angle ATB=\angle TCB$

よって　$\angle BTC+\angle ATB=\angle TAB+\angle TCB$

すなわち　$\theta=\angle TAB+\angle TCB$

四角形 TABC において

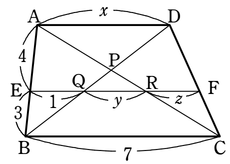
$\angle ATC+\angle TAB+\angle TCB+\angle ABC=360°$

すなわち　$\theta+\theta+168°=360°$

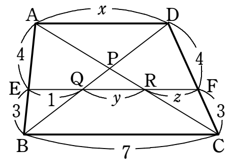
ゆえに　$2\theta=192°$

よって　$\theta=96°$

3．右の図において，AD∥EF∥BC のとき，$x:y:z$ を最も簡単な整数の比で表せ。



解答　$7:9:3$



AD∥EF∥BC から　DF : FC＝AE : EB＝4 : 3

EQ∥AD であるから　EQ : AD＝BE : BA

すなわち　$1:x=3:7$

よって　$x=\dfrac{7}{3}$

RF∥AD であるから　RF : AD＝CF : CD

すなわち　$z:\dfrac{7}{3}=3:7$　　よって　$z=1$

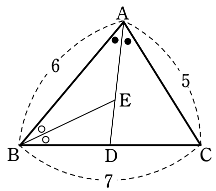
QF∥BC であるから　QF : BC＝DF : DC

すなわち　$(y+1):7=4:7$　　よって　$y=3$

したがって　$x:y:z=\dfrac{7}{3}:3:1=7:9:3$

4．AB＝6，BC＝7，CA＝5 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D，∠B の二等分線と線分 AD の交点を E とするとき，AE : ED を最も簡単な整数の比で表せ。

解答　11 : 7



AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝6 : 5

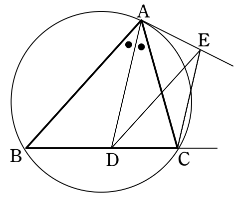
BC＝7 であるから　$BD=7\times\dfrac{6}{6+5}=\dfrac{42}{11}$

BE は ∠B の二等分線であるから

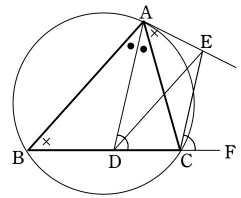
$AE:ED=BA:BD=6:\dfrac{42}{11}=11:7$

5．△ABC の ∠A の二等分線が BC と D で交わるとき，A において外接円に接線を引き，これと C を通り AD に平行な直線との交点を E とする。

∠A＝58°，∠B＝48° であるとき，∠CDE の大きさを求めよ。



解答　48°



AD は ∠A の二等分線であるから

$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle A=29°$

接線と弦の作る角の定理により　$\angle CAE=\angle B=48°$

よって　$\angle DAE=29°+48°=77°$

また，△ABD において

$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD$

$=48°+29°=77°$

ゆえに　$\angle ADC=\angle DAE$　……①

図のように点 F をとると，AD∥EC であるから　$\angle ADC=\angle ECF$　……②

①，② から　$\angle DAE=\angle ECF$

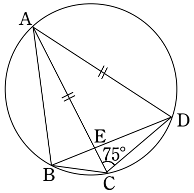
よって，四角形 ADCE は円に内接するから　$\angle CDE=\angle CAE$

したがって　$\angle CDE=48°$

6．四角形 ABCD が円に内接しており，AC と BD の交点を E とする。AC＝AD，

$\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=2:3$，∠ACD＝75° であるとき，∠AEB の大きさを求めよ。

解答　85°



$\angle CAD=180°-2\times 75°=30°$

$\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=2:3$ から　$\angle BDC:\angle CAD=2:3$

よって　$\angle BDC=\dfrac{2}{3}\angle CAD=20°$

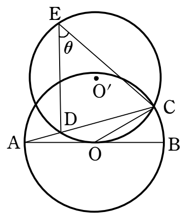
したがって　$\angle AEB=\angle CED$

$=180°-(\angle ECD+\angle EDC)$

$=180°-(75°+20°)$

$=85°$

7．右の図のように，円 O の直径 AB と円 O′ が点 O で接し，円 O と円 O′ の交点を C，直線 AC と円 O′ の交点を D とする。∠CAO$=15°$ のとき，角 θ を求めよ。



解答　$\theta=45°$

O と D を結ぶ。

△OAC は OA＝OC の二等辺三角形であるから

$\angle OCA=\angle OAC=15°$

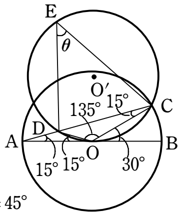
よって　$\angle COB=15°+15°=30°$

AB が円 O′ の接線であるから　$\angle DOA=\angle DCO=15°$

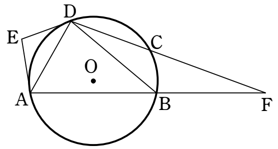
四角形 OCED が円 O′ に内接しているから

$\theta+\angle DOC=180°$

$\angle DOC=180°-(15°+30°)=135°$ であるから　$\theta=180°-135°=45°$



8．右の図で，4点 A，B，C，D は円 O の円周上の点で，E は点 A における接線と点 D における接線の交点，F は AB の延長と DC の延長の交点である。



また，AD＝DC，DB＝BF，$\overset{\frown}{DA}:\overset{\frown}{AB}=1:2$ である。

(1)　∠AFD の大きさを求めよ。

(2)　∠AED の大きさを求めよ。

(3)　BF＝6 であるとき，この円の半径を求めよ。

解答　(1)　20°　(2)　100°　(3)　$2\sqrt{3}$

(1)　$\angle AFD=x$ とする。

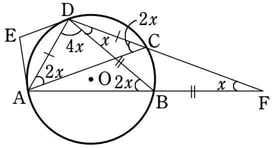
DB＝BF であるから　$\angle BDF=\angle AFD=x$

△BFD において

$\angle ABD=\angle BFD+\angle BDF=2x$

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角で　$\angle ACD=\angle ABD=2x$

AD＝DC であるから　$\angle DAC=\angle ACD=2x$



$\overset{\frown}{DA}:\overset{\frown}{AB}=1:2$ であるから　$\angle ADB=2\angle ACD=4x$

△DAC の内角の和は 180° であるから　$x+4x+2x+2x=180°$

すなわち　$9x=180°$　　ゆえに　$x=20°$

よって　$\angle AFD=20°$

(2)　接線と弦の作る角の定理により　$\angle ADE=\angle DAE=\angle ACD=40°$

よって　$\angle AED=180°-40°\times 2=100°$

(3)　△CAF において　$\angle DCA=\angle CAF+\angle CFA$

ゆえに　$40°=\angle CAF+20°$

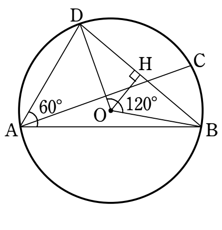
よって　$\angle CAF=20°$

したがって，$\angle DAB=60°$となるから

$\angle DOB=60°\times 2=120°$

また　DB＝BF＝6

そこで，中心 O から DB に垂線 OH を引くと，点 H は DB の中点になり，△OBH は3辺の長さが $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になる。



したがって　$OB=\dfrac{2}{\sqrt{3}}BH=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 6\right)=2\sqrt{3}$

9．面積が1である △ABC において，辺 BC，CA，AB を 2：1 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，線分 AL と BM，BM と CN，CN と AL の交点をそれぞれ P，Q，R とするとき，△PQR の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{7}$

△ABL と直線 CN について，メネラウスの定理により

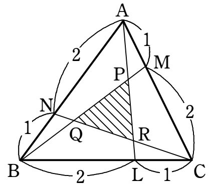
$\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BC}{CL}\cdot\dfrac{LR}{RA}=1$

すなわち　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{LR}{RA}=1$

よって　$AR:RL=6:1$

ゆえに　$\triangle CAR=\dfrac{6}{7}\triangle CAL=\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{1}{3}\triangle ABC=\dfrac{2}{7}$

同様に　$\triangle ABP=\triangle BCQ=\dfrac{2}{7}$



したがって　$\triangle PQR=\triangle ABC-(\triangle CAR+\triangle ABP+\triangle BCQ)=1-\dfrac{2}{7}\times 3=\dfrac{1}{7}$

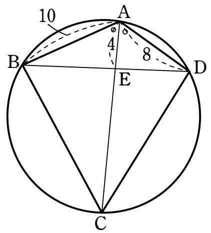
10. 右の図のように円に内接する四角形 ABCD があり，AB＝10，AD＝8，∠BAC＝∠DAC である。

また，AC と BD の交点を E とし，AE＝4 である。

(1)　AC の長さを求めよ。

(2)　BE：ED を最も簡単な整数の比で表せ。

(3)　BD の長さを求めよ。



解答　(1)　20　(2)　5：4　(3)　$\dfrac{36\sqrt{5}}{5}$

(1)　△ABE と △ACD において　∠BAE＝∠CAD

また，弧 AD に対する円周角は等しいから

∠ABE＝∠ACD

よって，△ABE∽△ACDであるから

AB：AC＝AE：AD

すなわち　10：AC＝4：8

したがって　AC＝20

(2)　AE は ∠A の二等分線であるから

BE：ED＝AB：AD＝10：8＝5：4

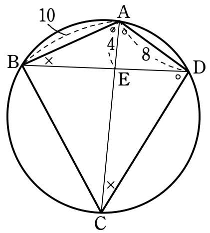
(3)　方べきの定理から　BE·ED＝AE·EC

BE＝$5x$，ED＝$4x$ とおくと　$5x\cdot 4x=4\cdot(20-4)$

よって　$x^2=\dfrac{16}{5}$

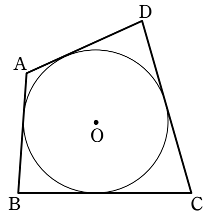
$x>0$ であるから　$x=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

したがって　$BD=9x=9\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{36\sqrt{5}}{5}$



11. 右の図のように，四角形 ABCD に円 O が内接している。

AB＝a，BC＝b，CD＝c のとき，AD の長さを，a，b，c を用いて表せ。



解答　$AD=a-b+c$

辺 AB，BC，CD，DA と円 O との接点を，順に点 E，F，G，H とし，AH＝x，DH＝y とする。

AE＝AH＝x であるから

BF＝BE＝AB－AE＝$a-x$　……　①

DH＝DG＝y であるから

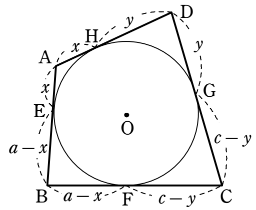
CF＝CG＝CD－DG＝$c-y$　……　②

ここで，BC＝BF＋CF であるから，①，② より

$b=(a-x)+(c-y)$

したがって　$x+y=a-b+c$

よって　$AD=a-b+c$



12. △ABC は直角三角形で，外心が内接円の周上にある。内接円の半径を1として外接円の半径を求めよ。

解答　$\sqrt{2}+1$

△ABC の内心を I とし，∠A＝90° とする。

このとき，直角三角形 ABC の外心は斜辺 BC の中点 M と一致する。

M が内接円の周上にあるから，内接円は M で辺 BC と接する。

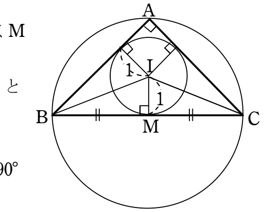
△IBM と △ICM において

IM が共通，　BM＝CM，∠IMB＝∠IMC＝90°

であるから　△IBM≡△ICM

よって　∠IBM＝∠ICM

∠B＝2∠IBM，∠C＝2∠ICM　であるから　∠B＝∠C



したがって，△ABC は AB＝AC の直角二等辺三角形であり，中線 AM は内心 I を通る。

また，AI は1辺の長さが1の正方形の対角線であるから　$AI=\sqrt{2}$

よって，求める外接円の半径は　$AM=AI+IM=\sqrt{2}+1$