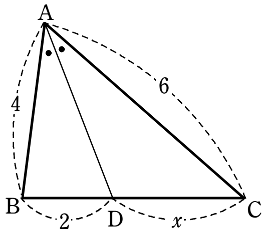
数学演習（平面図形）Ｈ２３．１２．６

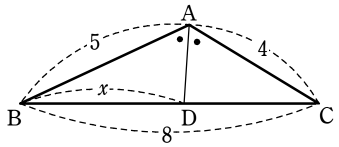
(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の図において，x の値を求めよ。ただし，AD は $\angle$A の二等分線である。

(1)



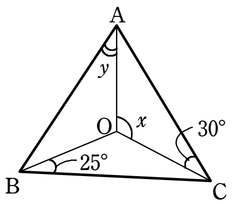
(2)



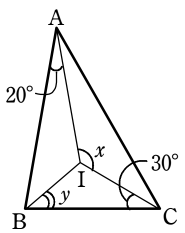
2．AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC で，$\angle$A の外角の二等分線と，辺 BC の C を越える延長との交点を D とする。BD の長さを求めよ。

3．次の図において，O，I はそれぞれ △ABC の外心，内心である。(1)，(2) では $\angle x$，$\angle y$ の大きさを，(3) では $\angle x$ の大きさをそれぞれ求めよ。

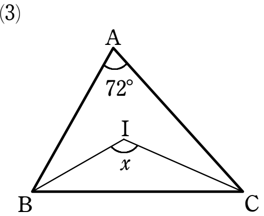
(1)



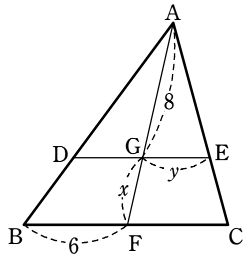
(2)



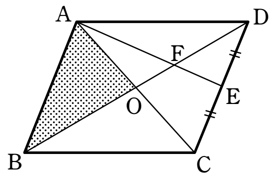
(3)



4．右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。



5．平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とする。また，辺 CD の中点を E，AE と BD の交点を F とする。△AFD の面積が 5 cm^2 のとき，△ABO の面積を求めよ。

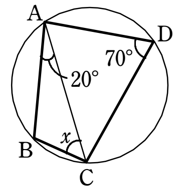


6．△ABC において，辺 BC の中点を D，辺 AC の中点を E とし，AD と BE の交点を F とする。△ABC の面積を S とするとき，次の三角形の面積を S で表せ。

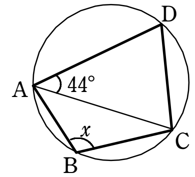
(1)　△ABD　　　　　　　　(2)　△ABF

7．次の図で，$\angle x$ の大きさを求めよ。ただし，(2) では $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ である。

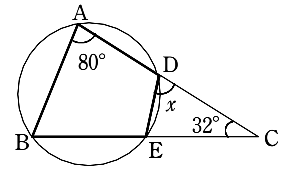
(1)



(2)

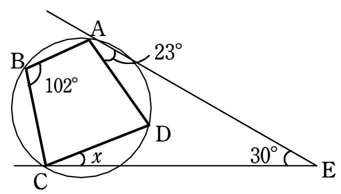


(3)

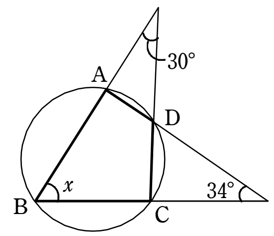


8．次の図において，$\angle x$ の大きさを求めよ。

(1)



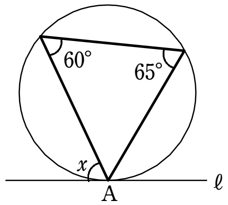
(2)



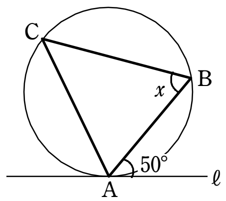
9．AB＝5，BC＝6，CA＝7 である △ABC の内接円が，辺 AB と接する点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

10. 次の図で，直線 ℓ は点 A における円の接線である。$\angle x$ の大きさを求めよ。

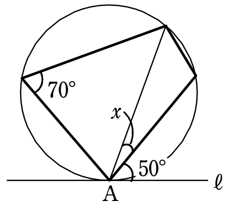
(1)



(2) AC＝BC

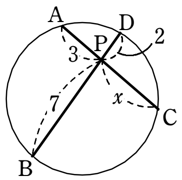


(3)

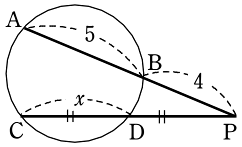


11. 次の図において，x の値を求めよ。

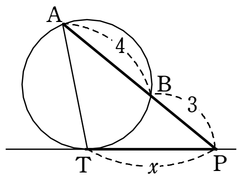
(1)



(2) CD＝DP



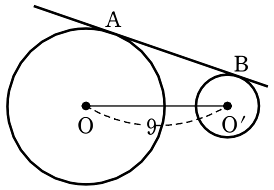
(3) PT は T における円の接線



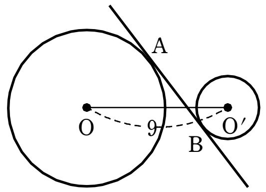
12. 半径が異なる 2 つの円があり，中心間の距離が 9 ならば外接し，5 ならば内接する。このとき，2 つの円の半径を求めよ。

13. 下の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O の半径が 5，円 O′ の半径が 2 であるとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)



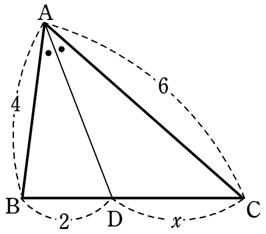
14. △ABC において，辺 BC を 3 : 1 に外分する点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を R とし，PR と AC の交点を Q とする。このとき，AQ : QCを求めよ。

15. △ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 R，Q があり，AR : RB＝5 : 1，AQ : QC＝2 : 3 である。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とするとき，次の比を求めよ。

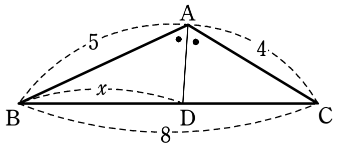
(1) BP : PC　　(2) AO : OP

１．次の図において，x の値を求めよ。ただし，AD は ∠A の二等分線である。

(1)



(2)



解答　(1)　$x=3$　　(2)　$x=\dfrac{40}{9}$

解説

(1)　AB : AC＝BD : DC であるから　　4 : 6＝2 : x

よって　　$4x=12$　　　　したがって　　$x=3$

(2)　AB : AC＝BD : DC であるから　　5 : 4＝x : $(8-x)$

よって　　$5(8-x)=4x$　　　　ゆえに　　$x=\dfrac{40}{9}$

２．AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC で，∠A の外角の二等分線と，辺 BC の C を越える延長との交点を D とする。BD の長さを求めよ。

解答　15

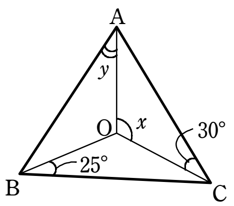
解説

BD＝x とすると，AB : AC＝BD : DC であるから　　6 : 4＝x : $(x-5)$

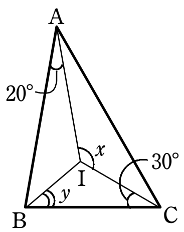
よって　　$6(x-5)=4x$　　　　したがって　　$x=15$　　　　すなわち　　BD＝15

３．次の図において，O，I はそれぞれ △ABC の外心，内心である。(1)，(2) では ∠x，∠y の大きさを，(3) では ∠x の大きさをそれぞれ求めよ。

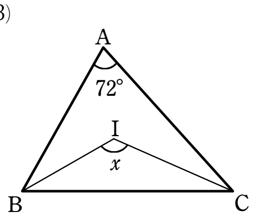
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=120°$，$y=35°$　　(2)　$x=130°$，$y=40°$　　(3)　$x=126°$

解説

(1)　△OAC において，OA＝OC であるから　　∠OAC＝30°

よって　　$x=180°-2\times30°=120°$

また　　∠ABC＝$\dfrac{1}{2}$∠AOC＝60°

OA＝OB であるから　　y＝∠ABO＝60°－25°＝35°

(2)　∠IAC＝∠IAB＝20°，∠ICA＝∠ICB＝30° であるから

$x=180°-(20°+30°)=130°$

また　　∠IBA＝∠IBC＝y

よって，△ABC において　　$2\times20°+2y+2\times30°=180°$

したがって　　$y=40°$

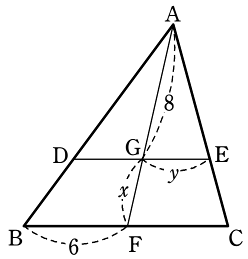
(3)　∠B＝2∠IBC，∠C＝2∠ICB であるから，△ABC において

72°＋2∠IBC＋2∠ICB＝180°　　　　よって　　∠IBC＋∠ICB＝54°

したがって，△IBC において

x＝180°－(∠IBC＋∠ICB)＝126°

４．右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。



解答　$x=4$，$y=4$

解説

重心 G は中線 AF を 2 : 1 に内分するから　　8 : x＝2 : 1

よって　　$2x=8$　　　　したがって　　$x=4$

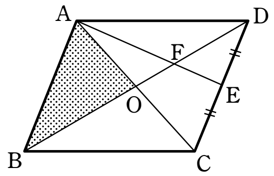
また，F は辺 BC の中点であるから　　FC＝BF＝6

GE∥FC であるから　　GE : FC＝AG : AF＝2 : 3

よって　　y : 6＝2 : 3　　　　ゆえに　　$3y=12$

したがって　　$y=4$

５．平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とする。また，辺 CD の中点を E，AE と BD の交点を F とする。△AFD の面積が 5 cm² のとき，△ABO の面積を求めよ。



解答　$\dfrac{15}{2}$ cm²

解説

OA＝OC，CE＝ED であるから，F は △ADC の重心である。

よって　　OF : FD＝1 : 2　　　　ゆえに　　△AOF : △AFD＝1 : 2

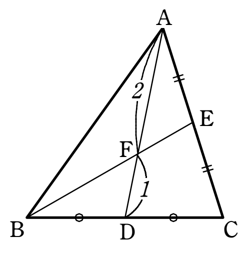
したがって　　△AOF＝$\dfrac{1}{2}$△AFD＝$\dfrac{5}{2}$ (cm²)

よって　　△AOD＝△AOF＋△AFD＝$\dfrac{5}{2}+5=\dfrac{15}{2}$ (cm²)

OB＝OD であるから　　△ABO＝△AOD＝$\dfrac{15}{2}$ (cm²)

６．△ABC において，辺 BC の中点を D，辺 AC の中点を E とし，AD と BE の交点を F とする。△ABC の面積を S とするとき，次の三角形の面積を S で表せ。

(1)　△ABD　　　　(2)　△ABF



解答　(1)　$\dfrac{1}{2}S$　　(2)　$\dfrac{1}{3}S$

解説

(1)　△ABC : △ABD＝BC : BD＝2 : 1

よって　　2△ABD＝△ABC

したがって　　△ABD＝$\dfrac{1}{2}S$

(2)　点 F は △ABC の重心であるから

AF : FD＝2 : 1

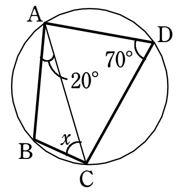
よって　　△ABD : △ABF＝AD : AF＝3 : 2

ゆえに　　3△ABF＝2△ABD

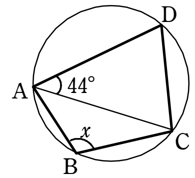
したがって　　△ABF＝$\dfrac{2}{3}$△ABD＝$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{3}S$

７．次の図で，∠x の大きさを求めよ。ただし，(2) では $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$ である。

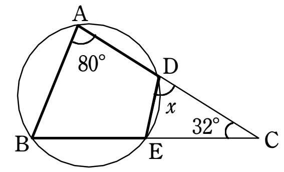
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　50°　　(2)　112°　　(3)　68°

解説

(1)　∠B＝180°－70°＝110°

よって　　$x=180°-(110°+20°)=50°$

(2)　AC＝AD であるから　　∠D＝(180°－44°)÷2＝68°

よって　　$x=180°-68°=112°$

(3)　∠DEC＝∠A＝80° であるから

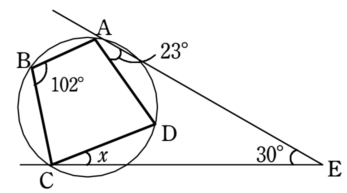
$x=180°-(80°+32°)=68°$

別解　∠B＝180°－(80°＋32°)＝68°

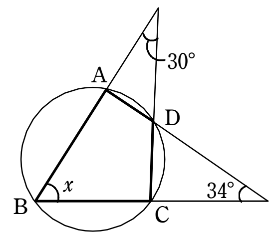
よって　　x＝∠B＝68°

８．次の図において，∠x の大きさを求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　25°　　(2)　58°

解説

(1)　直線 AD と直線 CE の交点を F とすると　　∠CDF＝102°

また　　∠DFC＝23°＋30°＝53°

したがって　　$x=180°-(102°+53°)=25°$

(2)　直線 AD と直線 BC の交点を E とすると　　∠CDE＝x

また　　∠DCE＝30°＋x

よって，△DCE において　　$x+(30°+x)+34°=180°$

したがって　　$x=(180°-30°-34°)\div2=58°$

９．AB＝5，BC＝6，CA＝7 である △ABC の内接円が，辺 AB と接する点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

解答　3

解説

△ABC の内接円と辺 BC，CA との接点をそれぞれ E，F とする。

AD＝x とおくと，AD＝AF から　　AF＝x

また　　BD＝AB－AD＝$5-x$，　CF＝AC－AF＝$7-x$

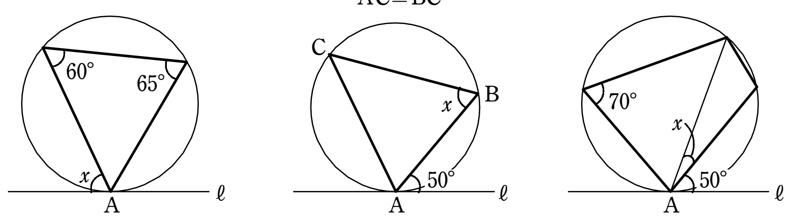
BD＝BE，CE＝CF であるから　　BE＝$5-x$，　CE＝$7-x$

BC＝BE＋CE であるから　　$6=(5-x)+(7-x)$

これを解いて　$x=3$　　すなわち　$\mathrm{AD}=3$

10. 次の図で，直線 ℓ は点 A における円の接線である。$\angle x$ の大きさを求めよ。

(1)　(2) AC＝BC　(3)



解答　(1) 65°　(2) 65°　(3) 20°

解説

(1)　円の接線と弦の作る角により　　$x=65°$

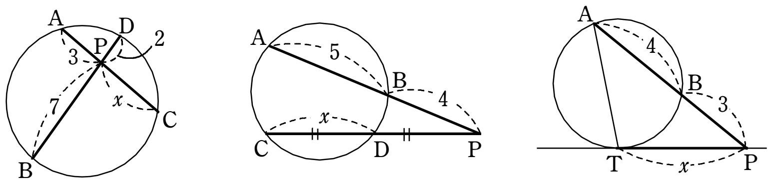
(2)　円の接線と弦の作る角により　　$\angle \mathrm{ACB}=50°$

　AC＝BC であるから　　$x=(180°-50°)\div 2=65°$

(3)　円の接線と弦の作る角により　　$x+50°=70°$　　よって　　$x=20°$

11. 次の図において，x の値を求めよ。

(1)　(2) CD＝DP　(3) PT は T における円の接線



解答　(1)　$x=\dfrac{14}{3}$　　(2)　$x=3\sqrt{2}$　　(3)　$x=\sqrt{21}$

解説

(1)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PD}$

　よって　　$3\cdot x=7\cdot 2$　　したがって　　$x=\dfrac{14}{3}$

(2)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

　よって　　$(4+5)\cdot 4=2x\cdot x$　　したがって　　$x^2=18$

　$x>0$ であるから　　$x=3\sqrt{2}$

(3)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

　よって　　$(4+3)\cdot 3=x^2$　　したがって　　$x^2=21$

　$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{21}$

12. 半径が異なる 2 つの円があり，中心間の距離が 9 ならば外接し，5 ならば内接する。このとき，2 つの円の半径を求めよ。

解答　7，2

解説

2 つの円の半径を r，r' $(r>r')$ とすると

$r+r'=9$　……①

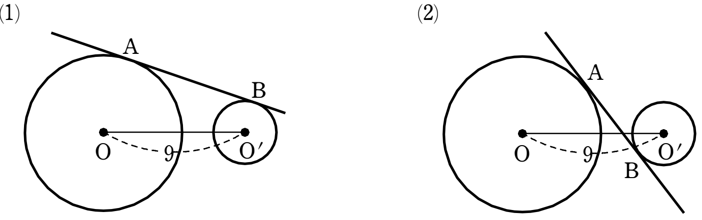
$r-r'=5$　……②

①，② を解いて　　$r=7$，$r'=2$

すなわち，2 つの円の半径は　　7，2

13. 下の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O の半径が 5，円 O′ の半径が 2 であるとき，線分 AB の長さを求めよ。

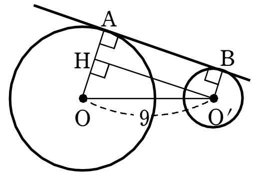
(1)　(2)



解答　(1)　$6\sqrt{2}$　　(2)　$4\sqrt{2}$

解説

(1)　右の図のように，点 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと



$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{HA}=\mathrm{OA}-\mathrm{O'B}=5-2=3$

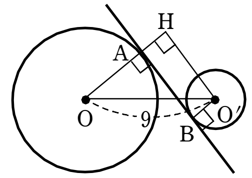
△OO′H は直角三角形であるから

$\mathrm{O'H}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}$

$=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

よって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{O'H}=6\sqrt{2}$

(2)　右の図のように，点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′H を下ろすと



$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}+\mathrm{HA}=\mathrm{OA}+\mathrm{O'B}=5+2=7$

△OO′H は直角三角形であるから

$\mathrm{O'H}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}$

$=\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

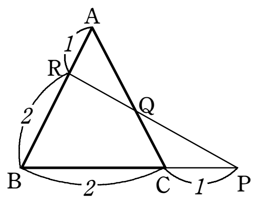
よって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{O'H}=4\sqrt{2}$

14. △ABC において，辺 BC を 3 : 1 に外分する点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を R とし，PR と AC の交点を Q とする。このとき，AQ : QCを求めよ。

解答　3 : 2

解説

△ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって　$\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　　ゆえに　　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{2}{3}$

したがって　　AQ : QC＝3 : 2

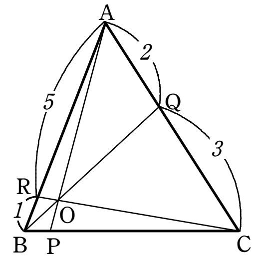
15. △ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 R，Q があり，AR : RB＝5 : 1，AQ : QC＝2 : 3 である。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とするとき，次の比を求めよ。

(1)　BP : PC　　(2)　AO : OP

解答　(1)　2 : 15　　(2)　17 : 3

解説

(1)　△ABC と点 O にチェバの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{1}=1$　　ゆえに　　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{2}{15}$

したがって　　BP : PC＝2 : 15

(2)　△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

ここで，(1) の結果から　　BC : CP＝17 : 15

よって　　$\dfrac{17}{15}\cdot\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\cdot\dfrac{5}{1}=1$　　ゆえに　　$\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{3}{17}$

したがって　　AO : OP＝17 : 3