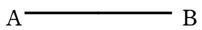
数学演習（平面図形）Ｈ２９．１２．１６　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

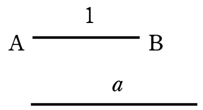
１. 与えられた線分 AB に対して，次の点を作図せよ。

⑴　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 E

⑵　線分 AB を 3 : 1 に外分する点 F

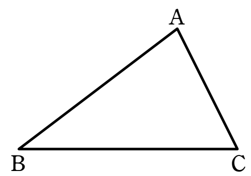


２. 長さ 1 の線分 AB および長さ a の線分が与えられたとき，長さ $\dfrac{1}{a}$ の線分を作図せよ。

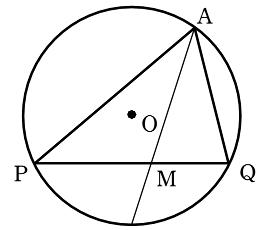


３. 長さ a の線分が与えられたとき，$\sqrt{3}\,a$ の長さの線分を作図せよ。

４. 右の図のように，三角形 ABC がある。正方形 PQRS を，線分 BC 上に辺 QR があり，頂点 P が線分 AB 上，頂点 S が線分 AC 上にあるように作図せよ。



５. 円 O の周上および円の内部にそれぞれ定点 A，M が与えられている。
いま M を通る弦 PQ を引いて，AM が ∠PAQ の二等分線となるようにしたい。そのような弦 PQ を作図せよ。



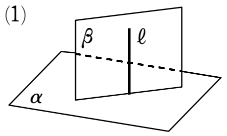
６. 線分 AB とその上の定点 P がある。このとき，AB を斜辺とする直角三角形 ABC を作り，AC 上に点 Q， BC 上に点 R を，四角形 PQCR が正方形になるようにとって，正方形 PQCR を作図せよ。

7．長さ a，b の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2-ax-b^2=0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ。

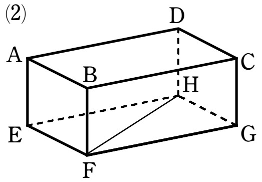
8．(1)　平面 α の垂線 ℓ を平面 β が含むとき，平面 α と平面 β は垂直であるといえるか。

(2)　直方体 ABCD－EFGH において，面 EFGH の対角線 FH は辺 BF に垂直であるといえるか。

(1)



(2)



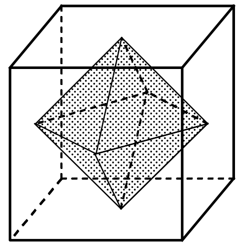
9．空間内の 2 つの直線 ℓ，m と平面 α について，次の記述が正しいか正しくないかを答えよ。

(1)　$\alpha\perp\ell$，$\ell /\!/ m$ のとき，$\alpha\perp m$ である。

(2)　$\ell /\!/ \alpha$ かつ $m /\!/ \alpha$ ならば，$\ell /\!/ m$ である。

(3)　$\ell /\!/ \alpha$ かつ $m\perp\alpha$ ならば，ℓ と平行で m と垂直な直線がある。

10. 1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。この立方体において，各面の対角線の交点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。

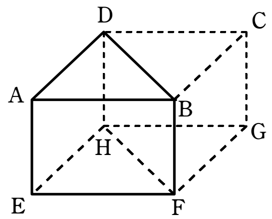


11. 右の図は，直方体を辺 DH，BF を含む平面で切った立体である。

(1)　辺 AE と垂直な面をすべていえ。

(2)　面 ABD と垂直な面をすべていえ。

(3)　辺 BD とねじれの位置にある辺をすべていえ。



12. 空間における直線 ℓ，m，n と平面 α，β，γ について，次の ①～⑤ の中でいつも正しいといえるものを選べ。

①　3 つの点を含む平面はただ 1 つである。

②　$\ell\perp\alpha$ かつ $\ell\perp\beta$ ならば，$\alpha /\!/ \beta$ である。

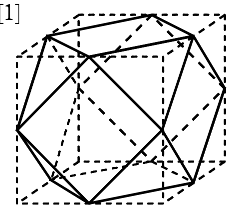
③　ℓ，m が α に含まれ，$\ell\perp n$ かつ $m\perp n$ ならば，$n\perp\alpha$ である。

④　α，β の交線を ℓ とし，$\ell\perp\gamma$ ならば，$\alpha\perp\gamma$ である。

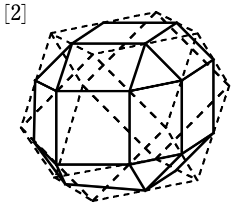
⑤　四角錐において，頂点を共有しない 2 つの線分はすべてねじれの位置にある。

13. 右の図 [1] は，正六面体の各辺の中点を通る平面で 8 個のかどを切り取った多面体である。この多面体を X とする。右の図 [2] は，多面体 X について，各辺の中点を通る平面でかどを切り取った多面体である。この多面体を Y とする。

[1]



[2]



(1)　多面体 X の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

(2)　多面体 Y の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

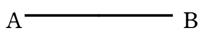
数学演習（平面図形）Ｈ２９．１２．１６

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1. 与えられた線分 AB に対して，次の点を作図せよ。

(1)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 E

(2)　線分 AB を 3 : 1 に外分する点 F



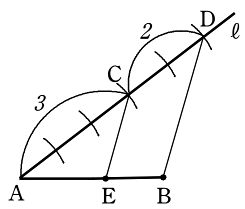
解説

(1) ①　点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，AC : CD = 3 : 2 となるように点 C，D をとる。

③　C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

BD∥EC より AE : EB = AC : CD であるから，点 E は線分 AB を 3 : 2 に内分する点である。

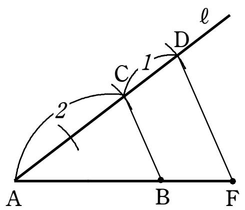


(2) ①　点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

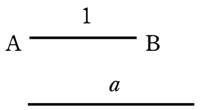
②　ℓ 上に，AC : CD = 2 : 1 となるように点 C，D をとる。

③　D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を F とする。点 F が求める点である。

BC∥FD より AF : FB = AD : DC であるから，点 F は線分 AB を 3 : 1 に外分する点である。



2. 長さ 1 の線分 AB および長さ a の線分が与えられたとき，長さ $\dfrac{1}{a}$ の線分を作図せよ。



解説

①　A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

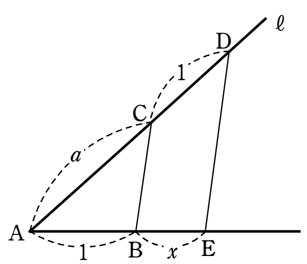
②　ℓ 上に，AC = a，CD = 1 となるように点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。

③　D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。

BE = x とすると，BC∥ED から

$1 : x = a : 1$　　すなわち　　$x = \dfrac{1}{a}$

よって，線分 BE は長さ $\dfrac{1}{a}$ の線分である。



3. 長さ a の線分が与えられたとき，$\sqrt{3}a$ の長さの線分を作図せよ。

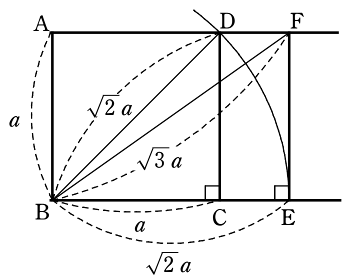
解説

①　1 辺の長さ a の正方形 ABCD をかき，対角線 BD を引く。

②　線分 BC の C を越える延長上に，BD = BE となる点 E をとり，E を通る直線 BE の垂線と直線 AD との交点を F とする。

③　線分 BF を引く。これが求める線分である。

△BCD において，三平方の定理により



$BD^2 = BC^2 + CD^2$

すなわち　$BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

ゆえに　　$BD = \sqrt{2}a$

△BEF において，三平方の定理により　$BF^2 = BE^2 + EF^2$

すなわち　$BF^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$

ゆえに　　$BF = \sqrt{3}a$

よって，線分 BF は長さ $\sqrt{3}a$ の線分である。

別解

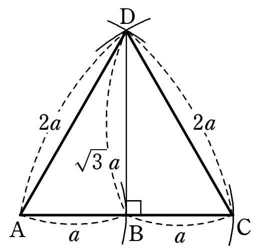
①　1 辺の長さ a の線分 AB の B を越える延長上に，AB = BC となる点 C をとる。

②　AD = CD = AC となる点 D をとり，線分 BD を引く。これが求める線分である。

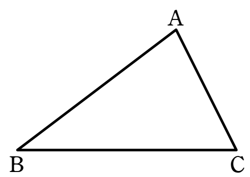
△ACD は 1 辺の長さ $2a$ の正三角形で，AB = a であるから

$AD : AB : BD = 2 : 1 : \sqrt{3}$

よって，線分 BD は長さ $\sqrt{3}a$ の線分である。



4. 右の図のように，三角形 ABC がある。正方形 PQRS を，線分 BC 上に辺 QR があり，頂点 P が線分 AB 上，頂点 S が線分 AC 上にあるように作図せよ。



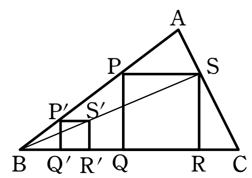
解説

①　線分 AB 上に点 P′ をとり，P′ から線分 BC に垂線 P′Q′ を引く。

②　線分 P′Q′ を 1 辺とする正方形 P′Q′R′S′ を，R′ が Q′ よりも C に近くなるようにかく。

③　直線 BS′ と線分 AC の交点を S とし，S から線分 BC に平行に引いた直線と線分 AB の交点を P とする。

④　S，P から線分 BC 上にそれぞれ垂線 SR，PQ を引く。四角形 PQRS が求める正方形である。



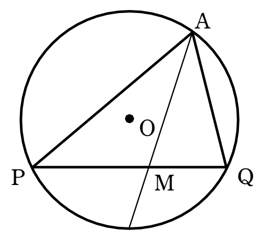
このとき，平行線と線分の比の関係から　　S′R′ : SR = BS′ : BS = P′S′ : PS

S′R′ = P′S′ であるから　　SR = PS

よって，四角形 PQRS は正方形であり，条件を満たす。

5. 円 O の周上および円の内部にそれぞれ定点 A，M が与えられている。

いま M を通る弦 PQ を引いて，AM が ∠PAQ の二等分線となるようにしたい。そのような弦 PQ を作図せよ。



解説

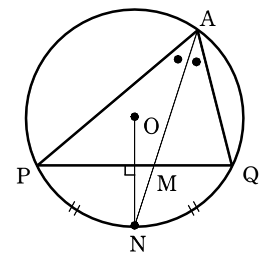
①　半直線 AM と円 O との交点を N とし，線分 ON を引く。

②　M を通り，線分 ON に垂直な直線と円との交点を P，Q とする。

③　線分 PQ を引く。これが求める弦 PQ である。

線分 PQ は半径 ON に垂直であるから，$\overset{\frown}{PN} = \overset{\frown}{QN}$ である。

よって，∠PAN = ∠QAN が成り立つ。



6. 線分 AB とその上の定点 P がある。このとき，AB を斜辺とする直角三角形 ABC を作り，AC 上に点 Q，BC 上に点 R を，四角形 PQCR が正方形になるようにとって，正方形 PQCR を作図せよ。

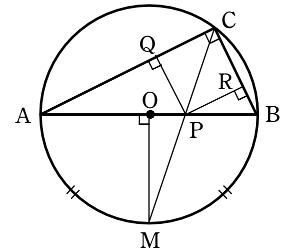
解説

①　AB を直径とする，中心が O の円をかく。

②　O を通り，AB に垂直な直線と，円との交点の 1 つを M とする。

③　半直線 MP と円の交点を C とし，P から線分 AC に下ろした垂線を PQ，P から線分 BC に下ろした垂線を PR とする。

④　4 点 P，Q，C，R を頂点とする四角形をかく。この四角形 PQCR が求める正方形である。



△PQC と △PRC において，

∠ACB = 90°，∠ACM = ∠BCM であるから

∠ACM = ∠BCM = 45°

∠PQC = ∠PRC = 90°

よって　△PQC ≡ △PRC

ゆえに，四角形 PQCR は，4 辺の長さが等しく，4 つの内角が直角であるから正方形である。

7. 長さ a，b の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2 - ax - b^2 = 0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ。

解説

①　長さ a の線分 CT を直径とする円 O をかく。

②　T において CT の垂線を引き，その上に PT = b となるように P をとる。

③　直線 OP と円 O との交点を，P に近い方から A，B とする。線分 PB が求める線分である。

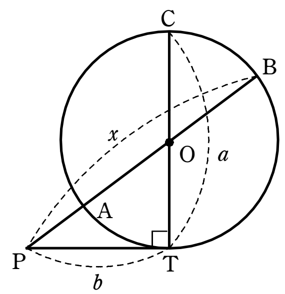
方べきの定理により

$PA \cdot PB = PT^2$

よって，PB = x とすると，PA = PB − AB = $x - a$ であるから　$(x-a)x = b^2$

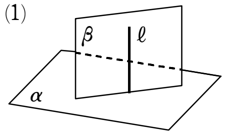
ゆえに　　$x^2 - ax - b^2 = 0$

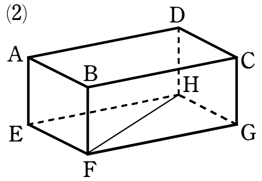
したがって，線分 PB が 2 次方程式 $x^2 - ax - b^2 = 0$ の正の解を長さとする線分である。



8．(1)　平面 α の垂線 ℓ を平面 β が含むとき，平面 α と平面 β は垂直であるといえるか。

(2)　直方体 ABCD－EFGH において，面 EFGH の対角線 FH は辺 BF に垂直であるといえるか。

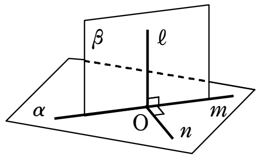
(1)


(2)


解答　(1)　いえる　　(2)　いえる

解説

(1)　ℓ と α との交点を O，α と β との交線を m，O を通り，m に垂直な α 上の直線を n とする。
$\ell \perp \alpha$ であるから　　$\ell \perp m$，$\ell \perp n$
よって　　$\alpha \perp \beta$
したがって，平面 α と平面 β は垂直であるといえる。



(2)　BF⊥EF，BF⊥FG であるから　　BF⊥面 EFGH
対角線 FH は面 EFGH 上にあるから　　FH⊥BF
したがって，面 EFGH の対角線 FH は辺 BF に垂直であるといえる。

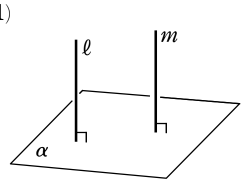
9．空間内の 2 つの直線 ℓ，m と平面 α について，次の記述が正しいか正しくないかを答えよ。

(1)　$\alpha \perp \ell$，$\ell /\!/ m$ のとき，$\alpha \perp m$ である。
(2)　$\ell /\!/ \alpha$ かつ $m /\!/ \alpha$ ならば，$\ell /\!/ m$ である。
(3)　$\ell /\!/ \alpha$ かつ $m \perp \alpha$ ならば，ℓ と平行で m と垂直な直線がある。

解答　(1)　正しい　　(2)　正しくない　　(3)　正しい

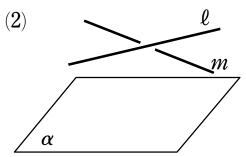
解説

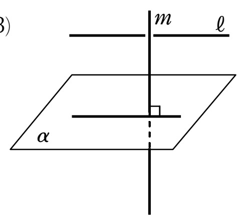
(1)　正しい

(1)


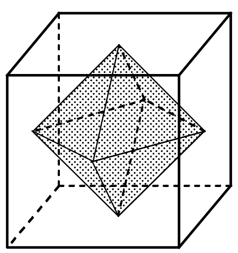
(2)　$\ell /\!/ \alpha$ かつ $m /\!/ \alpha$ であっても，ℓ と m がねじれの位置にあることがある。
よって，正しくない。

(3)　正しい

(2)


(3)


10．1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。この立方体において，各面の対角線の交点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。



解答　36 cm³

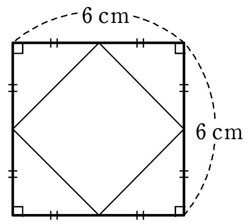
解説

正八面体を上下 2 つの合同な四角錐に分けて考える。
四角錐の底面積は，右の図から

$$6\times6-\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=18\ (\mathrm{cm}^2)$$

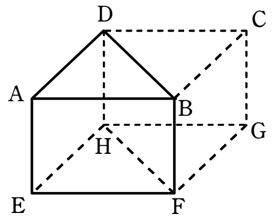
よって，求める体積は

$$\left(\frac{1}{3}\times18\times3\right)\times2=36\ (\mathrm{cm}^3)$$



11．右の図は，直方体を辺 DH，BF を含む平面で切った立体である。

(1)　辺 AE と垂直な面をすべていえ。
(2)　面 ABD と垂直な面をすべていえ。
(3)　辺 BD とねじれの位置にある辺をすべていえ。



解答　(1)　面 ABD，面 EFH　　(2)　面 AEFB，面 BFHD，面 DHEA
(3)　辺 AE，辺 EF，辺 EH

解説

(1)　AE⊥AB，AE⊥AD であるから　　AE⊥面 ABD
AE⊥EF，AE⊥EH であるから　　AE⊥面 EFH
辺 AE は面 AEFB および面 AEHD に含まれる。
また，辺 AE と面 BFHD は平行である。
よって，辺 AE と垂直な面は　　面 ABD，面 EFH

(2)　面 ABD と直線 AE，BF，DH は垂直である。
よって，面 ABD と垂直な面は
面 AEFB，面 BFHD，面 DHEA

(3)　辺 BD と平行な辺は　辺 FH
辺 BD と交わる辺は　辺 AB，AD，BF，DH
求める辺は，この 5 つの辺と辺 BD 自身を除いて
辺 AE，辺 EF，辺 EH

別解　辺 BD とねじれの位置にある辺は，辺 BD と平行でなく，かつ同じ平面上にないから　　辺 AE，辺 EF，辺 EH

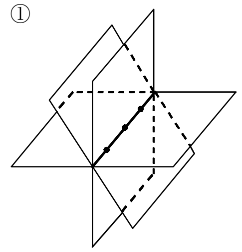
12．空間における直線 ℓ，m，n と平面 α，β，γ について，次の ①～⑤ の中でいつも正しいといえるものを選べ。

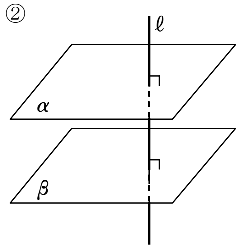
①　3 つの点を含む平面はただ 1 つである。
②　$\ell \perp \alpha$ かつ $\ell \perp \beta$ ならば，$\alpha /\!/ \beta$ である。
③　ℓ，m が α に含まれ，$\ell \perp n$ かつ $m \perp n$ ならば，$n \perp \alpha$ である。
④　α，β の交線を ℓ とし，$\ell \perp \gamma$ ならば，$\alpha \perp \gamma$ である。
⑤　四角錐において，頂点を共有しない 2 つの線分はすべてねじれの位置にある。

解答　②，④

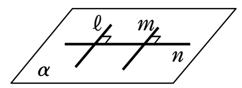
解説

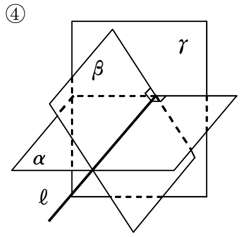
①　3 つの点が一直線上にあるとき，その 3 点を含む平面は無数にある。よって，正しくない。
②　正しい

①


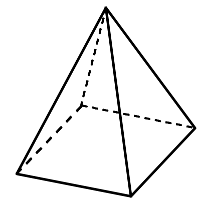
②


③　$\ell /\!/ m$ のとき，$\ell \perp n$ かつ $m \perp n$ であって，n が α に含まれていることがある。
よって，正しくない。
④　正しい

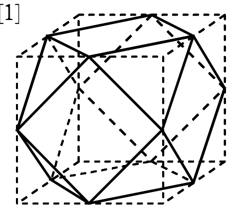
③


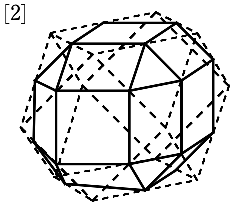
④


⑤　底面の向かい合う辺は，頂点を共有しないが，ねじれの位置にない。
よって，正しくない。
よって，正しいものは　　②，④



13．右の図 [1] は，正六面体の各辺の中点を通る平面で 8 個のかどを切り取った多面体である。
この多面体を X とする。
右の図 [2] は，多面体 X について，各辺の中点を通る平面でかどを切り取った多面体である。
この多面体を Y とする。

[1]


[2]


(1)　多面体 X の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。
(2)　多面体 Y の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　順に　14，24，12　　(2)　順に　26，48，24

解説

(1)　面は正六面体の各面で残った面が 6 面あり，切り取ることによって，できた面が正六面体の各頂点に 1 つずつできるから，面の数は　$6+8=14$
辺は切り取った三角錐によってできる辺だけあるから，辺の数は　$3\times8=24$
1 つの頂点を 2 つの正方形が共有していて，正方形は 6 個あるから，頂点の数は
$4\times6\div2=12$

(2)　多面体 Y には，1 辺の長さがもとの正六面体の面の半分の正方形が，正六面体を 2 回切り取って残った 6 面に 1 つずつあり，多面体 X の各頂点を含む立体を切り取ることによって，長方形の面が 12 面でき，正三角形が多面体 X を切り取って残った正方形以外の 8 面に 1 つずつある。　よって，面の数は　　$6+12+8=26$
1 つの辺を 2 つの面が共有しているから，辺の数は　　$(6\times4+12\times4+8\times3)\div2=48$
1 つの頂点を 4 つの面が共有しているから，頂点の数は
$(6\times4+12\times4+8\times3)\div4=24$