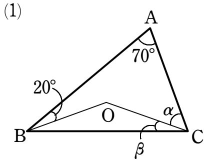
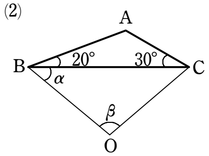
数学演習（平面図形）Ｈ２１．７．２３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．△ABC の外心を O とする。下の図の角 $\alpha$，$\beta$ を求めよ。

⑴

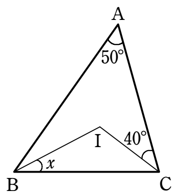



⑵



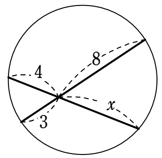

2．⑴　右の図において，点 I は △ABC の内心である。このとき，角 $x$ を求めよ。

⑵　△ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。AB＝8，BC＝7，AC＝4 であるとき，AI : ID を求めよ。

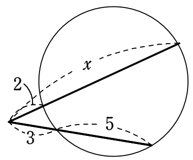



3．下の図の $x$ の値を求めよ。ただし，⑶ の図において，直線 AB は円 O の接線とする。

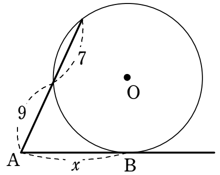
⑴



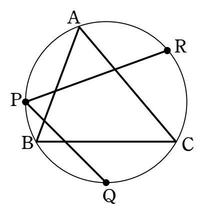

⑵



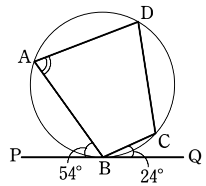

⑶




4．図のように △ABC の外接円の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に点 P をとり，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中点を Q，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ の中点を R とする。∠A＝60°，∠B＝70° のとき，∠RPQ を求めよ。



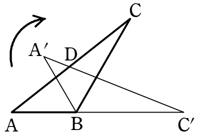

5．右の図で，直線 PQ は点 B における円の接線である。$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$，∠ABP＝54°，∠CBQ＝24° のとき，∠BAD を求めよ。




6．　1 辺の長さが 7 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD＝3，AE＝6 となるように 2 点 D，E をとる。このとき，BE と CD の交点を F，直線 AF と BC との交点を G とする。CG の長さを求めよ。

7．図の △A′BC′ は，AB＝3，BC＝5，CA＝7，∠ABC＝120° である △ABC を頂点 B を中心として矢印の向きに 60° 回転したものである。辺 AC と辺 A′C′ の交点を D とするとき

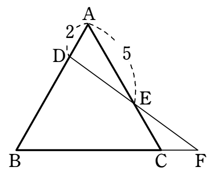
⑴　∠CDC′ を求めよ。　　　⑵　BD の長さを求めよ。



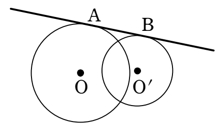

8．半径が異なる 2 つの円がある。2 つの円は中心間の距離が 7 のとき外接し，中心間の距離が 4 のとき内接する。2 つの円の半径を求めよ。

9．重心と垂心が一致する三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

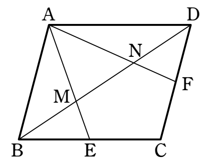
10．1 辺の長さが 8 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD＝2，AE＝5 となるように 2 点 D，E をとり，2 直線 DE，BC の交点を F とする。このとき，CF の長さを求めよ。




11．右の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O，O′ の半径を，それぞれ $r$，$r'$ とし，中心 O，O′ 間の距離を $d$ とするとき，線分 AB の長さを求めよ。ただし，$r>r'$ とする。

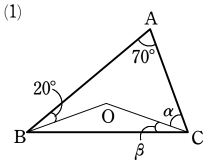



12．BD＝10 である平行四辺形 ABCD の辺 BC の中点を E，辺 CD の中点をF とし，線分 AE，AF と対角線 BD との交点をそれぞれM，N とする。このとき，線分 MN の長さを求めよ。

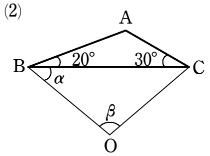


1．△ABC の外心を O とする。下の図の角 $\alpha$，$\beta$ を求めよ。

(1)




(2)




解答　(1)　$\alpha=50°$，$\beta=20°$　　(2)　$\alpha=40°$，$\beta=100°$

解説

(1)　$\angle OAB=\angle OBA=20°$ から　　$\angle OAC=50°$

よって　　$\alpha=\angle OAC=50°$

$\angle OBC=\angle OCB=\beta$ から，△ABC において

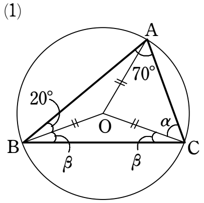
$20°+70°+50°+2\beta=180°$

ゆえに　　$\beta=20°$

別解　(後半)　$\angle BOC=2\angle BAC=140°$

ゆえに　　$\beta=\dfrac{180°-140°}{2}=20°$

(1)




(2)　$\angle BAC=180°-(20°+30°)=130°$　……①

ここで，$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$ であるから

$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC$

$=\angle OBA+\angle OCA$

$=(20°+\alpha)+(30°+\alpha)$

$=2\alpha+50°$　……②

①，② から　$2\alpha+50°=130°$

よって　　$\alpha=40°$

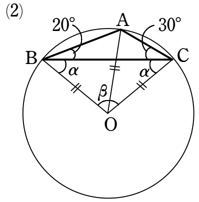
ゆえに　　$\beta=180°-2\times40°=100°$

別解　$360°-\beta=2\angle BAC=2\times130°=260°$

ゆえに　　$\beta=100°$

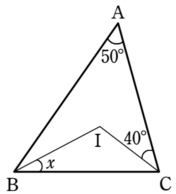
また　　$\alpha=\dfrac{180°-\beta}{2}=40°$

(2)




2．(1)　右の図において，点 I は △ABC の内心である。このとき，角 $x$ を求めよ。

(2)　△ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。AB=8，BC=7，AC=4 であるとき，AI : ID を求めよ。




解答　(1)　$x=25°$　　(2)　12 : 7

解説

(1)　$\angle ICB=\angle ICA=40°$，$\angle IBA=\angle IBC=x$ から

$2x+50°+40°\times2=180°$

よって　　$x=25°$

(2)　直線 AD は ∠A の二等分線であるから

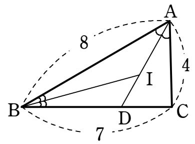
BD : DC=AB : AC

=8 : 4=2 : 1

よって　　$BD=\dfrac{2}{2+1}\times BC=\dfrac{14}{3}$

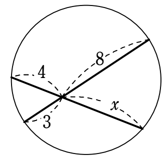
直線 BI は ∠B の二等分線であるから

$AI : ID=BA : BD=8 : \dfrac{14}{3}=12 : 7$

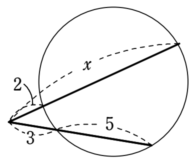



3．下の図の $x$ の値を求めよ。ただし，(3) の図において，直線 AB は円 O の接線とする。

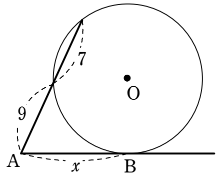
(1)




(2)




(3)




解答　(1)　$x=6$　　(2)　$x=12$　　(3)　$x=12$

解説

(1)　方べきの定理から　　$4\cdot x=3\cdot 8$

よって　　$x=6$

(2)　方べきの定理から　　$2\cdot x=3\cdot(3+5)$

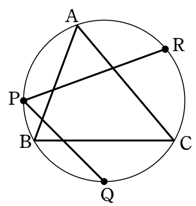
よって　　$x=12$

(3)　方べきの定理から　　$9\cdot(9+7)=x^2$

よって　　$x^2=144$

$x>0$ であるから　　$x=12$

4．図のように △ABC の外接円の $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P をとり，$\overset{\frown}{BC}$ の中点を Q，$\overset{\frown}{CA}$ の中点を R とする。∠A=60°，∠B=70° のとき，∠RPQ を求めよ。




解答　65°

解説

$\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{QC}$ であるから

$\angle QAB=\angle QAC$

$\angle BAC=60°$ であるから

$\angle QAB=\angle QAC=30°$

$\overset{\frown}{CR}=\overset{\frown}{RA}$ であるから

$\angle RBC=\angle RBA$

$\angle CBA=70°$ であるから

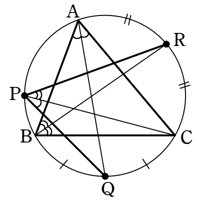
$\angle RBC=\angle RBA=35°$

ゆえに　　$\angle RPQ=\angle QPC+\angle RPC$

$=\angle QAC+\angle RBC$

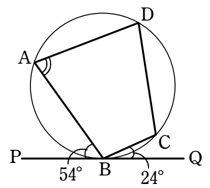
$=30°+35°$

$=65°$




5．右の図で，直線 PQ は点 B における円の接線である。

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$，∠ABP=54°，∠CBQ=24° のとき，∠BAD を求めよ。




解答　75°

解説

$\angle ABC=180°-(54°+24°)=102°$

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ であるから

$\angle ABD=\angle DBC$

ゆえに　　$\angle ABD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times102°=51°$

PQ は円の接線であるから

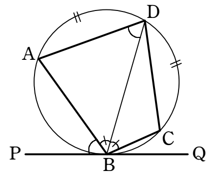
$\angle ADB=\angle ABP=54°$

よって，△ABD において

$\angle BAD=180°-(\angle ABD+\angle ADB)$

$=180°-(51°+54°)$

$=75°$




6．　1 辺の長さが 7 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD=3，AE=6 となるように 2 点 D，E をとる。このとき，BE と CD の交点を F，直線 AF と BC との交点を G とする。CG の長さを求めよ。

解答　$\dfrac{7}{9}$

解説

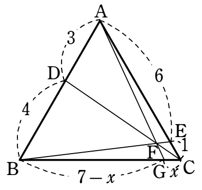
$CG=x$ とすると　　$BG=7-x$

チェバの定理により

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$$

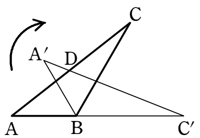
よって　　$\frac{7-x}{x}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=1$

ゆえに，$x=\frac{7}{9}$ から　　$CG=\frac{7}{9}$




7．図の $\triangle A'BC'$ は，$AB=3$，$BC=5$，$CA=7$，$\angle ABC=120°$ である $\triangle ABC$ を頂点 B を中心として矢印の向きに $60°$ 回転したものである。辺 AC と辺 $A'C'$ の交点を D とするとき

(1)　$\angle CDC'$ を求めよ。　　　(2)　BD の長さを求めよ。




解答　(1)　$60°$　　(2)　$\frac{15}{7}$

解説

(1)　$\angle DCB=\angle DC'B$ から，四角形 $BDCC'$ は円に内接する。

$\angle CBC'=60°$ であるから

$$\angle CDC'=60°$$

(2)　$\triangle ADB$ と $\triangle AC'C$ において

$\angle A$ は共通

また　　$\angle ADB=\angle AC'C$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADB \backsim \triangle AC'C$$

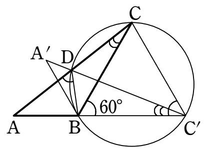
ゆえに　　$AB:BD=AC:CC'$

ここで，$BC=BC'$，$\angle CBC'=60°$ であるから $\triangle CBC'$ は正三角形になる。

よって　　$CC'=BC=5$

ゆえに　　$3:BD=7:5$

したがって　　$BD=3\times5\div7=\frac{15}{7}$




8．半径が異なる 2 つの円がある。2 つの円は中心間の距離が 7 のとき外接し，中心間の距離が 4 のとき内接する。2 つの円の半径を求めよ。

解答　$\frac{3}{2}$，$\frac{11}{2}$

解説

2 つの円の半径を $r$，$r'$ $(r>r')$ とする。

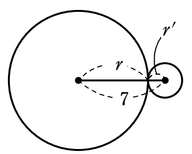
2 つの円が外接するとき，中心間の距離は 7 であるから

$$r+r'=7 \quad \cdots\cdots ①$$

2 つの円が内接するとき，中心間の距離は 4 であるから

$$r-r'=4 \quad \cdots\cdots ②$$

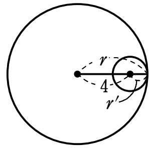
①＋② から　　$2r=11$




よって　　$r=\frac{11}{2}$

① から　　$r'=\frac{3}{2}$

ゆえに，2 つの円の半径は　　$\frac{3}{2}$，$\frac{11}{2}$




9．重心と垂心が一致する三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

解答　略

解説

$\triangle ABC$ の重心を G とすると，直線 AG は $\triangle ABC$ の中線である。

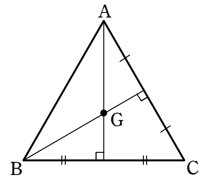
ゆえに，直線 AG は線分 BC を 2 等分する。

また，G は $\triangle ABC$ の垂心でもあるから

$$AG\perp BC$$

よって，直線 AG は線分 BC の垂直二等分線であるから

$$AB=AC \quad \cdots\cdots ①$$




同様にして，G が $\triangle ABC$ の重心であることから，直線 BG は $\triangle ABC$ の中線である。

ゆえに，直線 BG は線分 CA を 2 等分する。

また，G は $\triangle ABC$ の垂心でもあるから　　$BG\perp CA$

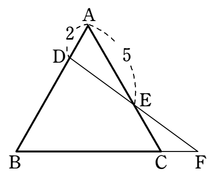
よって，直線 BG は線分 CA の垂直二等分線であるから

$$BC=BA \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$AB=BC=CA$

したがって，$\triangle ABC$ は正三角形である。

10．1 辺の長さが 8 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に $AD=2$，$AE=5$ となるように 2 点 D，E をとり，2 直線 DE，BC の交点を F とする。このとき，CF の長さを求めよ。




解答　2

解説

$CF=x$ とおくと　　$BF=x+8$

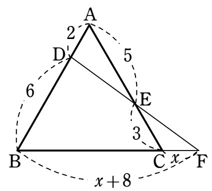
メネラウスの定理により

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$$

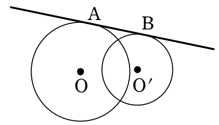
よって　　$\frac{x+8}{x}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}=1$

ゆえに　　$x=2$

すなわち　$CF=2$




11．右の図において，直線 AB は円 O，$O'$ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O，$O'$ の半径を，それぞれ $r$，$r'$ とし，中心 O，$O'$ 間の距離を $d$ とするとき，線分 AB の長さを求めよ。ただし，$r>r'$ とする。




解答　$\sqrt{d^2-(r-r')^2}$

解説

直線 AB は 2 つの円 O，$O'$ の共通接線であるから

$$OA\perp AB,\ O'B\perp AB$$

ゆえに，点 $O'$ から線分 OA に垂線 $O'H$ を下ろすと，四角形 $ABO'H$ は長方形となる。

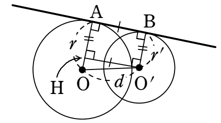
よって　　$AB=HO'$，$HA=O'B$

ゆえに　　$OH=OA-HA=r-r'$

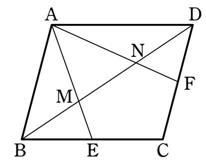
$\triangle OO'H$ に三平方の定理を適用すると

$$O'H=\sqrt{OO'^2-OH^2}=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$$

すなわち　　$AB=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$




12．$BD=10$ である平行四辺形 ABCD の辺 BC の中点を E，辺 CD の中点をFとし，線分 AE，AF と対角線 BD との交点をそれぞれM，N とする。このとき，線分 MN の長さを求めよ。




解答　$\frac{10}{3}$

解説

線分 AC，BD の交点を O とする。

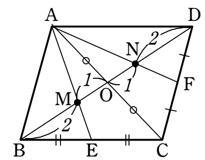
四角形 ABCD は平行四辺形であるから

$$AO=OC$$

$\triangle ABC$ において，点 M は中線 AE，BO の交点であるから，重心である。

よって　　$BM:MO=2:1$

ゆえに　　$BM=2MO$




$\triangle ACD$ において，点 N は中線 AF，DO の交点であるから，重心である。

よって　　$DN:NO=2:1$

ゆえに　　$DN=2NO$

また，$BO=OD$ であるから

$$BM=2MO=MN=2ON=ND$$

つまり，$BM=MN=ND$ が成り立つので，$MN=\frac{1}{3}BD=\frac{10}{3}$