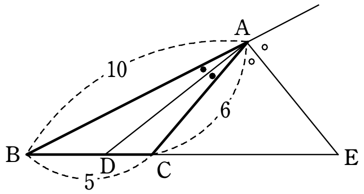
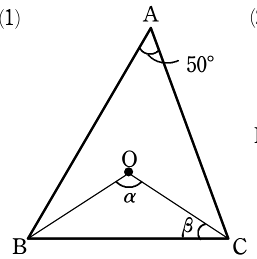
数学演習（平面図形）Ｈ２７．１２．１５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．AB＝10，BC＝5，CA＝6 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D，E とする。このとき，線分 DE の長さを求めよ。

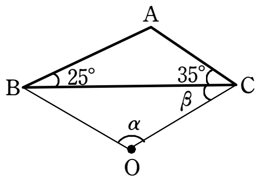


2．右の図で，点 O は △ABC の外心である。角 α，β を求めよ。

(1)



(2)

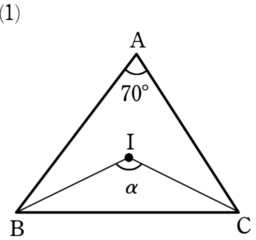


3．右の図で，点 I は △ABC の内心である。次のものを求めよ。

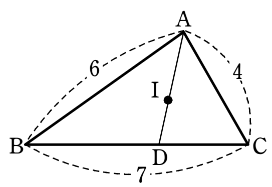
(1)　角 α

(2)　AI:ID

(1)



(2)



4．△ABC の重心を G，直線 AG，BG と辺 BC，AC の交点をそれぞれ D，E とする。また，点 E を通り BC に平行な直線と直線 AD の交点を F とする。

(1)　AD＝a とおくとき，線分 AG，FG の長さを a を用いて表せ。

(2)　面積比 △GBD：△ABC を求めよ。

5．AB＝$\sqrt{7}$，BC＝a，CA＝$\sqrt{3}$ である △ABC において，辺 BC，AC の中点をそれぞれ M，N とする。

(1)　AM＝2 のとき，a の値を求めよ。

(2)　a が (1) の値のとき，線分 BN の長さを求めよ。

6．△ABC の辺 AB を 3：4 に内分する点を D，辺 AC を 5：6 に内分する点を E とし，BE と CD の交点と点 A を結ぶ直線が BC と交わる点を F とするとき，比 BF：FC を求めよ。

7．△ABC の辺 AB を 1：2 に内分する点を D，線分 BC を 4：3 に内分する点を E，AE と CD の交点を F とするとき，次の比を求めよ。

(1)　AF：FE　　　　(2)　DF：FC

8．3 辺の長さが次のような △ABC が存在するかどうかを調べよ。

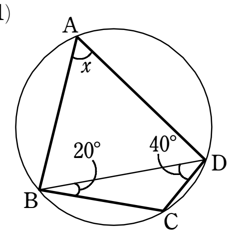
(1)　AB＝3，BC＝6，CA＝2　　　　(2)　AB＝8，BC＝10，CA＝17

9．(1)　AB＝2，BC＝4，CA＝3 である △ABC の 3 つの角の大小を調べよ。

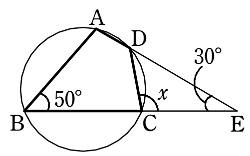
(2)　∠A＝50°，∠B＝60° である △ABC の 3 つの辺の長さの大小を調べよ。

10．次の図において，x を求めよ。ただし，(3) の点 O は円の中心である。

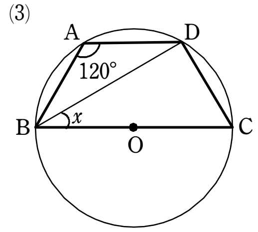
(1)



(2)



(3)



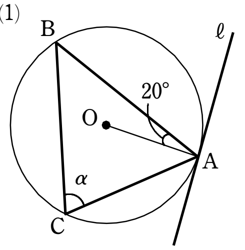
11. △ABCの内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ P，Q，R とする。次の問いに答えよ。

(1)　AB＝6，AC＝7，AR＝2 のとき，線分 AQ，BC の長さを求めよ。

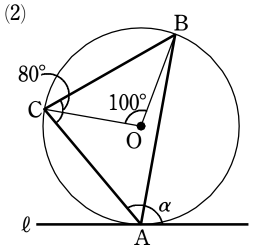
(2)　AB＝9，BC＝11，CA＝8 のとき，線分 CQ の長さを求めよ。

12. 次の図において，α，β を求めよ。ただし，ℓ は円 O の接線であり，点 A は接点である。また PQ∥CB である。

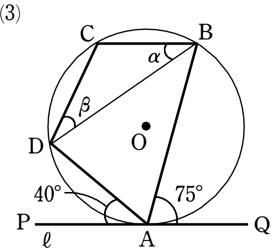
(1)



(2)

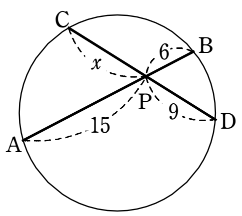


(3)

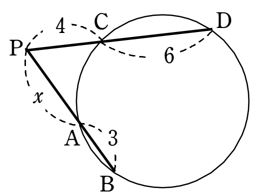


13. 次の図において，x の値を求めよ。ただし，(3) の PT は円の接線である。

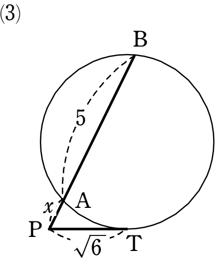
(1)



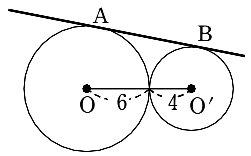
(2)



(3)



14. 右の図において，2 円 O，O′ は外接しており，A，B はそれぞれ 2 円 O，O′ の共通接線と円 O，O′ との接点である。円 O，O′ の半径をそれぞれ 6，4 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



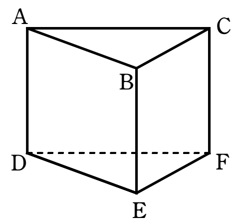
15. 右の図の三角柱 ABC−DEF において，AB＝AD，∠BAC＝30°，∠ABC＝90° である。

(1)　辺 BC と垂直な辺をすべてあげよ。

(2)　辺 BC とねじれの位置にある辺をすべてあげよ。

(3)　次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

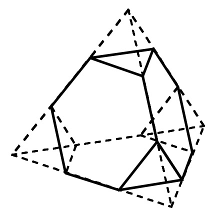
（ア）　AC，BE　　（イ）　AC，EF　　（ウ）　AE，CF



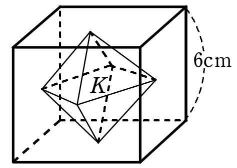
16. 次のような凸多面体の，面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v を，それぞれ求めよ。

(1)　12 個の正五角形と 20 個の正六角形の面からなる凸多面体

(2)　右の図のように，正四面体の各辺を 3 等分する点を通る平面で，すべてのかどを切り取ってできる凸多面体



17. 1 辺の長さが 6 cmの立方体がある。この立方体の各面の対角線の交点 6 個を頂点とする立体 K は，正八面体である。K の体積を求めよ。



18. AB＝2，BC＝4 である長方形 ABCD において，辺 CD の中点を M とする。辺 BC 上を点 P が動くとき，AP＋PM の最小値を求めよ。

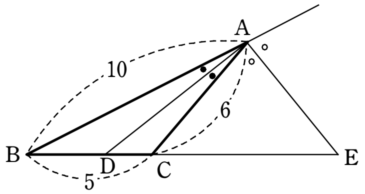
19. (1)　与えられた線分 AB を 1 : 4 に内分する点を作図せよ。

(2)　与えられた線分 AB を 5 : 1 に外分する点を作図せよ。

数学演習（平面図形）Ｈ２７．１２．１５

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．AB＝10，BC＝5，CA＝6 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D，E とする。このとき，線分 DE の長さを求めよ。



解答　$\dfrac{75}{8}$

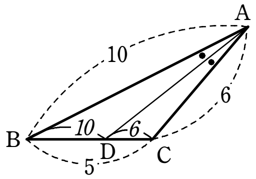
解説

AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC$

ゆえに　$BD : DC = 10 : 6 = 5 : 3$

よって　$DC = \dfrac{3}{5+3}BC = \dfrac{3}{8} \times 5 = \dfrac{15}{8}$



また，AE は ∠A の外角の二等分線であるから

$BE : EC = AB : AC$

ゆえに　$BE : EC = 10 : 6 = 5 : 3$

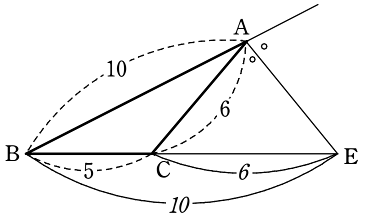
よって　$BC : CE = (5-3) : 3$

$= 2 : 3$

ゆえに　$CE = \dfrac{3}{2}BC = \dfrac{3}{2} \times 5 = \dfrac{15}{2}$

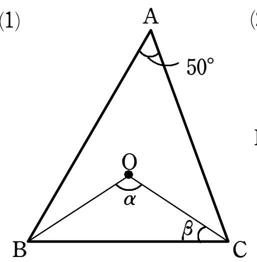
したがって　$DE = DC + CE$

$= \dfrac{15}{8} + \dfrac{15}{2} = \dfrac{75}{8}$

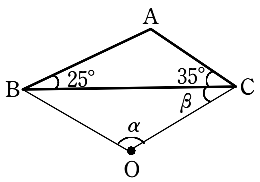


2．右の図で，点 O は △ABC の外心である。角 α，β を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$\alpha = 100°$，$\beta = 40°$　　(2)　$\alpha = 120°$，$\beta = 30°$

解説

(1)　円周角の定理により

$\angle BOC = 2\angle BAC$

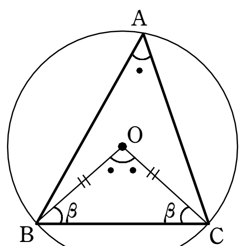
よって　$\alpha = 2 \times 50° = 100°$

OB＝OC であるから

$\angle OBC = \angle OCB$

ゆえに　$2\beta + 100° = 180°$

これを解いて　$\beta = 40°$



(2)　△ABC において

$\angle BAC = 180° - (25° + 35°) = 120°$

円周角の定理により

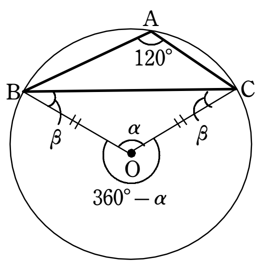
$360° - \alpha = 2 \times 120°$

これを解いて　$\alpha = 120°$

OB＝OC であるから

$\angle OBC = \angle OCB$

ゆえに　$2\beta + 120° = 180°$



これを解いて　$\beta = 30°$

別解　OA＝OB＝OC であるから

$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \angle OBA + \angle OCA$

$= (25° + \beta) + (35° + \beta) = 2\beta + 60°$

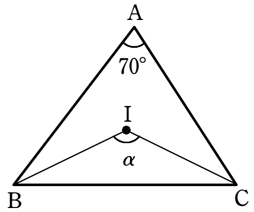
よって　$120° = 2\beta + 60°$　　ゆえに　$\beta = 30°$

3．右の図で，点 I は △ABC の内心である。次のものを求めよ。

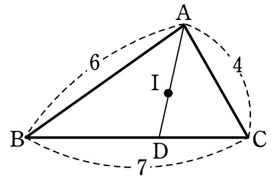
(1)　角 α

(2)　AI:ID

(1)



(2)



解答　(1)　125°　　(2)　10 : 7

解説

(1)　BI，CI はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから

$\angle B = 2\angle IBC$，$\angle C = 2\angle ICB$

△ABC において

$70° + \angle B + \angle C = 180°$

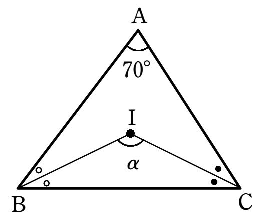
すなわち　$70° + 2\angle IBC + 2\angle ICB = 180°$

ゆえに　$2(\angle IBC + \angle ICB) = 110°$

よって　$\angle IBC + \angle ICB = 55°$

$\angle CIB = 180° - (\angle IBC + \angle ICB)$ であるから

$\alpha = 180° - 55° = 125°$



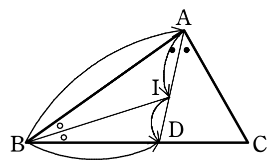
(2)　AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC = 6 : 4 = 3 : 2$

よって　$BD = \dfrac{3}{3+2}BC = \dfrac{3}{5} \times 7 = \dfrac{21}{5}$

また，BI は ∠B の二等分線であるから

$AI : ID = BA : BD = 6 : \dfrac{21}{5} = 10 : 7$



4．△ABC の重心を G，直線 AG，BG と辺 BC，AC の交点をそれぞれ D，E とする。また，点 E を通り BC に平行な直線と直線 AD の交点を F とする。

(1)　AD＝a とおくとき，線分 AG，FG の長さを a を用いて表せ。

(2)　面積比 △GBD : △ABC を求めよ。

解答　(1)　$AG = \dfrac{2}{3}a$，$FG = \dfrac{1}{6}a$　　(2)　1 : 6

解説

(1)　G は △ABC の重心であるから

$AG : GD = 2 : 1$

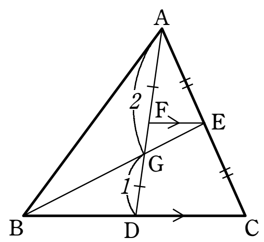
よって　$AG = \dfrac{2}{2+1}AD = \dfrac{2}{3}a$

また，E は辺 AC の中点であり，FE∥DC であるから

$AF : FD = AE : EC = 1 : 1$

ゆえに　$AF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}a$

よって　$FG = AG - AF = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{6}a$



(2)　点 D は辺 BC の中点であるから

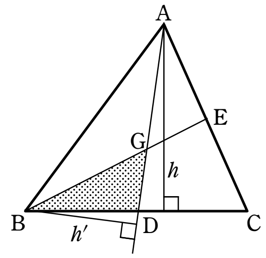
△ABC＝2△ABD

また，AD : GD＝3 : 1 であるから

△ABD＝3△GBD

よって　△ABC＝6△GBD

したがって　△GBD : △ABC＝1 : 6



5．AB＝$\sqrt{7}$，BC＝a，CA＝$\sqrt{3}$ である △ABC において，辺 BC，AC の中点をそれぞれ M，N とする。

(1)　AM＝2 のとき，a の値を求めよ。

(2)　a が (1) の値のとき，線分 BN の長さを求めよ。

解答　(1)　$a = 2$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

解説

(1)　AM は △ABC の中線であるから，中線定理により

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

よって　$(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2\left\{2^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right\}$

整理すると　$a^2 = 4$

$a > 0$ であるから　$a = 2$

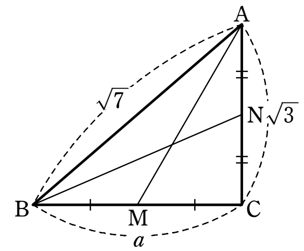
(2)　BN は △ABC の中線であるから，中線定理により

$BC^2 + BA^2 = 2(BN^2 + CN^2)$

よって　$2^2 + (\sqrt{7})^2 = 2\left\{BN^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$

整理すると　$BN^2 = \dfrac{19}{4}$

$BN > 0$ であるから　$BN = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$



6．△ABC の辺 AB を 3 : 4 に内分する点を D，辺 AC を 5 : 6 に内分する点を E とし，BE と CD の交点と点 A を結ぶ直線が BC と交わる点を F とするとき，比 BF : FC を求めよ。

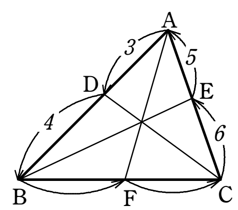
解答　10 : 9

解説

△ABC において，チェバの定理により　$\dfrac{BF}{FC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AD}{DB} = 1$

よって　$\dfrac{BF}{FC} \cdot \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = 1$　　ゆえに　$\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{10}{9}$

したがって　BF : FC＝10 : 9



7．△ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D，線分 BC を 4 : 3 に内分する点を E，AE と CD の交点を F とするとき，次の比を求めよ。

(1)　AF : FE　　　　(2)　DF : FC

解答　(1)　7 : 6　　(2)　4 : 9

解説

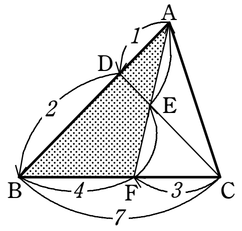
(1)　△ABE と直線 CD について，メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$$

よって　$\frac{7}{3}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{1}{2}=1$

すなわち　$\frac{FA}{EF}=\frac{7}{6}$

したがって　AF : FE＝7 : 6



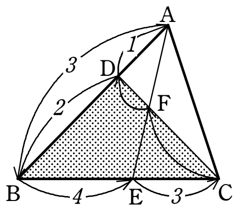
(2)　△DBC と直線 AE について，メネラウスの定理により

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DA}{AB}=1$$

よって　$\frac{4}{3}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{1}{3}=1$

すなわち　$\frac{FD}{CF}=\frac{4}{9}$

したがって　DF : FC＝4 : 9



8．3 辺の長さが次のような △ABC が存在するかどうかを調べよ。

(1)　AB＝3，BC＝6，CA＝2　　　(2)　AB＝8，BC＝10，CA＝17

解答　(1)　存在しない　　(2)　存在する

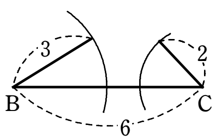
解説

(1)　CA＜AB＜BC であり

$CA+AB=5$

よって　$BC>CA+AB$

したがって，△ABC は存在しない。

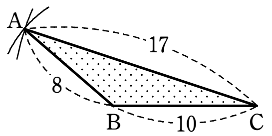


(2)　AB＜BC＜CA であり

$AB+BC=18$

よって　$CA<AB+BC$

したがって，△ABC は存在する。



9．(1)　AB＝2，BC＝4，CA＝3 である △ABC の 3 つの角の大小を調べよ。

(2)　∠A＝50°，∠B＝60° である △ABC の 3 つの辺の長さの大小を調べよ。

解答　(1)　∠C＜∠B＜∠A　　(2)　BC＜CA＜AB

解説

(1)　AB＜CA＜BC であるから

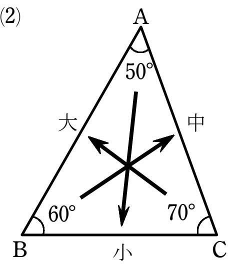
∠C＜∠B＜∠A

(2)　∠C＝180°−(∠A＋∠B)＝70°

よって　∠A＜∠B＜∠C

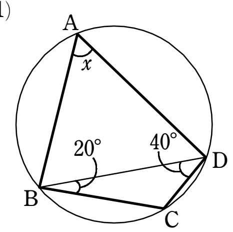
したがって　BC＜CA＜AB

(2)

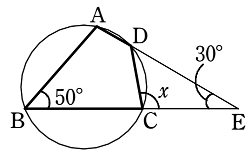


10. 次の図において，x を求めよ。ただし，(3) の点 O は円の中心である。

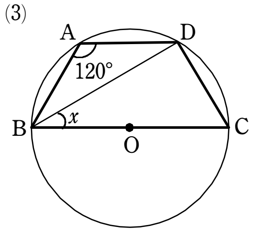
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　60°　　(2)　100°　　(3)　30°

解説

(1)　△BCD において　　∠C＝180°−(20°＋40°)＝120°

よって　　x＝180°−∠C＝180°−120°＝60°

(2)　∠A＝∠DCE＝x

よって，△ABE において　　x＝180°−(50°＋30°)＝100°

別解　∠CDE＝∠B＝50°

よって，△CED において　x＝180°−(50°＋30°)＝100°

(3)　∠C＝180°−∠A＝180°−120°＝60°

また，辺 BC は円 O の直径であるから　　∠CDB＝90°

よって，△BCD において　　x＝180°−(60°＋90°)＝30°

11. △ABC の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ P，Q，R とする。次の問いに答えよ。

(1)　AB＝6，AC＝7，AR＝2 のとき，線分 AQ，BC の長さを求めよ。

(2)　AB＝9，BC＝11，CA＝8 のとき，線分 CQ の長さを求めよ。

解答　(1)　AQ＝2，BC＝9　　(2)　5

解説

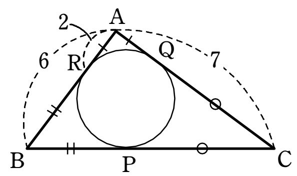
(1)　AQ＝AR＝2

また　　BP＝BR＝6−2＝4,

CP＝CQ＝7−2＝5

よって　　BC＝BP＋CP

＝4＋5＝9



(2)　CQ＝x とする。

CA＝8 から　　AQ＝8−x

AR＝AQ であるから　　AR＝8−x

また，CP＝CQ であるから

CP＝x

BC＝11 から　　BP＝11−x

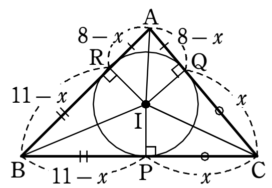
BR＝BP であるから　　BR＝11−x

AB＝AR＋RB，AB＝9 であるから

$(8-x)+(11-x)=9$

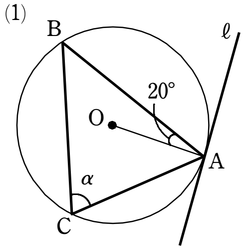
これを解いて　　$x=5$

すなわち　　CQ＝5

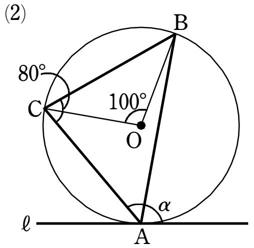


12. 次の図において，α，β を求めよ。ただし，ℓ は円 O の接線であり，点 A は接点である。また PQ∥CB である。

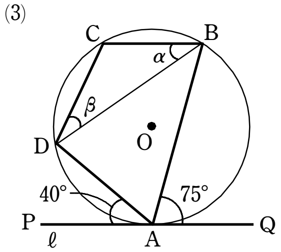
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　70°　　(2)　130°　　(3)　α＝35°，β＝30°

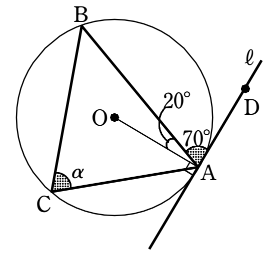
解説

(1)　直線 ℓ 上に点 D を右の図のようにとると

∠BAD＝∠OAD−∠OAB

＝90°−20°＝70°

よって　　α＝∠BAD＝70°



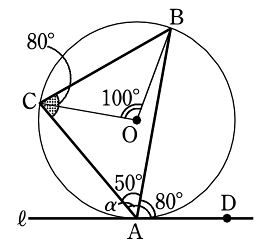
(2)　$\angle CAB=\frac{1}{2}\angle COB=\frac{1}{2}\times100°=50°$

また，直線 ℓ 上に点 D を右の図のようにとると

∠BAD＝∠BCA＝80°

よって　　α＝∠CAB＋∠BAD

＝50°＋80°＝130°



(3)　PQ∥CB から　α＋∠ABD＝75°

また　　∠ABD＝∠DAP＝40°

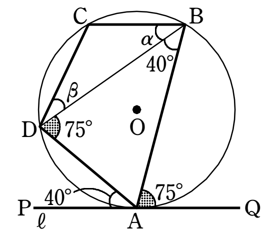
よって　　α＝75°−40°＝35°

次に，四角形 ABCD は円に内接するから

∠CDA＝180°−75°＝105°

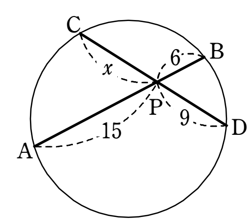
また　　∠BDA＝∠BAQ＝75°

よって　　β＝105°−75°＝30°

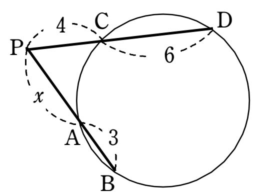


13. 次の図において，x の値を求めよ。ただし，(3) の PT は円の接線である。

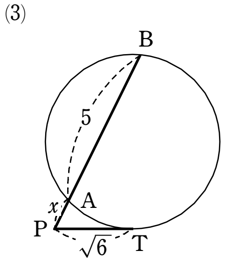
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=10$　　(2)　$x=5$　　(3)　$x=1$

解説

(1)　方べきの定理により　　PA・PB＝PC・PD

よって　15・6＝x・9　　ゆえに　　$x=10$

(2)　方べきの定理により　　PA・PB＝PC・PD

よって　　$x\cdot(x+3)=4\cdot(4+6)$

整理すると　　$x^2+3x-40=0$

ゆえに　　$(x-5)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　　$x=5$

(3)　方べきの定理により　　PA・PB＝PT^2

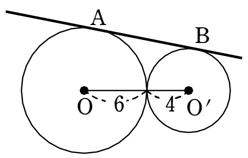
よって　　$x\cdot(x+5)=(\sqrt{6})^2$

整理すると　　$x^2+5x-6=0$

ゆえに　　$(x-1)(x+6)=0$

$x>0$ であるから　　$x=1$

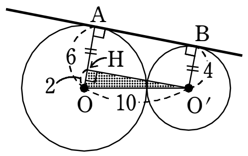
14. 右の図において，2 円 O，O′ は外接しており，A，B はそれぞれ 2 円 O，O′ の共通接線と円 O，O′ との接点である。円 O，O′ の半径をそれぞれ 6，4 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



解答　$4\sqrt{6}$

解説

O と A，O′ と B をそれぞれ結び，O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろす。



OA⊥AB，O′B⊥AB であるから

AH＝O′B＝4

△OO′H は直角三角形であるから

$\mathrm{OH}^2+\mathrm{O'H}^2=\mathrm{OO'}^2$

ここで　　OO′＝6＋4＝10，　OH＝OA−AH＝6−4＝2

O′H＞0 であるから

$\mathrm{O'H}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

AB＝O′H であるから　　AB＝$4\sqrt{6}$

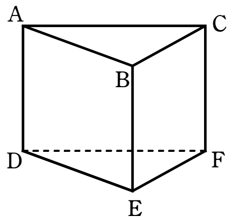
15. 右の図の三角柱 ABC−DEF において，AB＝AD，∠BAC＝30°，∠ABC＝90° である。

(1)　辺 BC と垂直な辺をすべてあげよ。

(2)　辺 BC とねじれの位置にある辺をすべてあげよ。

(3)　次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq 90°$ とする。

(ア)　AC，BE　　(イ)　AC，EF　　(ウ)　AE，CF



解答　(1)　辺 AB，AD，BE，CF，DE　　(2)　辺 AD，DE，DF

(3)　(ア)　$\theta=90°$　　(イ)　$\theta=60°$　　(ウ)　$\theta=45°$

解説

(1)　辺 AB，AD，BE，CF，DE

(2)　辺 BC とねじれの位置にある辺は BC と同じ平面上にない辺であるから

辺 AD，DE，DF

(3)　(ア)　2 直線 AC，BE のなす角は 2 直線 AC，AD のなす角と等しい。

よって　　$\theta=\angle\mathrm{CAD}=90°$

(イ)　2 直線 AC，EF のなす角は 2 直線 AC，BC のなす角と等しい。

よって　　$\theta=\angle\mathrm{ACB}=180°-(30°+90°)=60°$

(ウ)　2 直線 AE，CF のなす角は 2 直線 AE，AD のなす角と等しい。

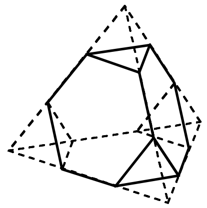
AB＝AD より，四角形 ADEB は正方形であるから，△ADE は直角二等辺三角形である。

よって　　$\theta=\angle\mathrm{DAE}=45°$

16. 次のような凸多面体の，面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v を，それぞれ求めよ。

(1)　12 個の正五角形と 20 個の正六角形の面からなる凸多面体

(2)　右の図のように，正四面体の各辺を 3 等分する点を通る平面で，すべてのかどを切り取ってできる凸多面体



解答　(1)　$f=32$，$e=90$，$v=60$　　(2)　$f=8$，$e=18$，$v=12$

解説

(1)　面の数は　　$f=12+20=32$

辺の数は　　$e=(5\times12+6\times20)\div2=90$

オイラーの多面体定理から　　$v-90+32=2$

よって　　$v=60$

(2)　1 つのかどを切り取ると，新しい面として正三角形が 1 つできる。

正三角形は 4 個できるから，この数だけ正四面体より面の数が増える。

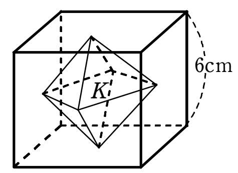
よって，面の数は　　$f=4+4=8$

辺の数は　　$e=(3\times4+6\times4)\div2=18$

オイラーの多面体定理から　　$v-18+8=2$

よって　　$v=12$

17. 1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。この立方体の各面の対角線の交点 6 個を頂点とする立体 K は，正八面体である。K の体積を求めよ。



解答　36 cm^3

解説

右の図のように頂点 A～U を定める。

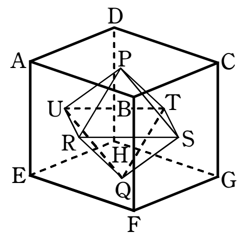
立体 K の体積は，正四角錐 P−RSTU の体積の 2 倍である。

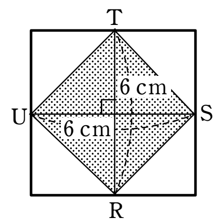
正四角錐 P−RSTU の底面は，正方形 RSTU で，その面積は　　$\dfrac{1}{2}\times6\times6=18\ (\mathrm{cm}^2)$

また，正四角錐の高さは　　$6\div2=3\ (\mathrm{cm})$

よって，立体 K の体積は

$\left(\dfrac{1}{3}\times18\times3\right)\times2=36\ (\mathrm{cm}^3)$



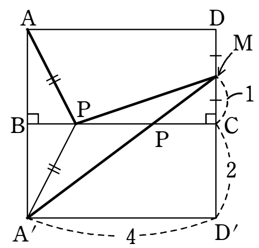


18. AB＝2，BC＝4 である長方形 ABCD において，辺 CD の中点を M とする。辺 BC 上を点 P が動くとき，AP＋PM の最小値を求めよ。

解答　5

解説

辺 BC に関して点 A，D と対称な点をそれぞれ A′，D′ とする。



このとき，AP＝A′P であるから

AP＋PM＝A′P＋PM≧A′M

よって，3 点 A′，P，M が一直線上にあるとき，AP＋PM は最小となり，その最小値は線分 A′M の長さに等しい。

直角三角形 A′D′M において

$\mathrm{A'M}^2=\mathrm{A'D'}^2+\mathrm{D'M}^2=4^2+3^2=25$

A′M＞0 であるから　　$\mathrm{A'M}=\sqrt{25}=5$

したがって，求める最小値は　5

19. (1)　与えられた線分 AB を 1 : 4 に内分する点を作図せよ。

(2)　与えられた線分 AB を 5 : 1 に外分する点を作図せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

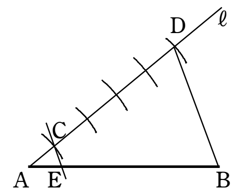
(1)　①　A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，A から等間隔に点をとり，1 番目の点を C，5 番目の点を D とする。

このとき　　AC : CD＝1 : 4

③　C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。

点 E が求める点である。



(2)　①　A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，A から等間隔に点をとり，4 番目の点を C，5 番目の点を D とする。

このとき　　AC : CD＝4 : 1

③　D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。

点 E が求める点である。