数学演習（確率）Ｈ２３．１１．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．座標平面上を動く点Pが原点Oにある。1回の移動において確率$\frac{2}{3}$でx軸方向に1，確率$\frac{1}{3}$でy軸方向に1だけ移動する。5回の移動後にPが点(3，2)にいる確率を求めよ。

2．1から9までの番号札から1枚抜き取り，番号を見てからもとに戻すことを3回行うとき，3枚の番号の積が偶数となる確率を求めよ。

3．数直線上の原点に点Pがある。Pを，1個のさいころを投げて，1または6の目が出たら負の方向に1だけ，それ以外の目が出たら正の方向に1だけ移動する。さいころを4回投げた後，Pの座標pが次のようになる確率を求めよ。

(1)　$p=0$　　(2)　$p=-1$

4．2個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　目の和が4の倍数になる確率　　(2)　目の積が偶数になる確率

5．1個のさいころを5回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3以上の目がちょうど2回出る確率

(2)　3以上の目が出るのが1回以下である確率

6．3個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が3以下である確率　　(2)　出る目の最大値が4である確率

7．1枚の硬貨を6回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が3回だけ出る確率　　(2)　表が5回以上出る確率

8．1 組 52 枚のトランプから 1 枚取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　スペードまたは絵札が出る確率

(2)　偶数または 3 の倍数（絵札は除く）が出る確率

9．赤玉 2 個，青玉 3 個，黄玉 2 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　すべて青玉が出る確率

(2)　赤玉 1 個と青玉 2 個が出る確率

(3)　どの色の玉も出る確率

10. 1 から 7 までの番号札の中から同時に 5 枚取り出すとき，最大の数を X とする。X の期待値を求めよ。

11. 箱 A，B，C に赤玉と白玉が右の表の個数だけ入っている。各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出すとき，白玉がちょうど 2 個出る確率を求めよ。

	A	B	C
赤玉	3	2	1
白玉	1	2	3

12. 5 枚の 10 円硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が 30 円のとき，このゲームに参加することは得であるか，損であるか。

13. A，B 2 人が，3 セット先取した方が勝ちとなるテニスの試合を行うとき，勝者が決まるまでのセット数の期待値を求めよ。ただし，2 人の力は互角であり，各セットにおいて引き分けはないものとする。

1．座標平面上を動く点 P が原点 O にある。1 回の移動において確率 $\frac{2}{3}$ で x 軸方向に 1，確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸方向に 1 だけ移動する。5 回の移動後に P が点 (3，2) にいる確率を求めよ。

解答　$\frac{80}{243}$

解説
5 回の移動後に点 (3，2) にいるのは，x 軸方向に 3 回，y 軸方向に 2 回移動したときである。

よって，求める確率は　${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=10\times\frac{8}{3^5}=\frac{80}{243}$

2．1 から 9 までの番号札から 1 枚抜き取り，番号を見てからもとに戻すことを 3 回行うとき，3 枚の番号の積が偶数となる確率を求めよ。

解答　$\frac{604}{729}$

解説
「3 枚の番号の積が偶数となる」という事象は，「3 枚の番号の積が奇数となる」という事象の余事象である。

3 枚の番号の積が奇数となる確率は　$\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{125}{729}$

よって，求める確率は　$1-\frac{125}{729}=\frac{604}{729}$

3．数直線上の原点に点 P がある。P を，1 個のさいころを投げて，1 または 6 の目が出たら負の方向に 1 だけ，それ以外の目が出たら正の方向に 1 だけ移動する。さいころを 4 回投げた後，P の座標 p が次のようになる確率を求めよ。

(1)　$p=0$　　(2)　$p=-1$

解答　(1)　$\frac{8}{27}$　　(2)　0

解説
4 回のうち，1 または 6 の目が出た回数を n とすると，点Pの座標pは

(-1)がn回で$(+1)$が$4-n$回より

$p=(-1)\cdot n+1\cdot(4-n)$　　すなわち　$p=4-2n$

(1)　$p=0$となるのは　$4-2n=0$ を解くと　$n=2$

よって，さいころを 4 回投げた後，$p=0$ となるのは，1 または 6 の目が 2 回出たときである。

したがって，求める確率は　${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(2)　$p=-1$となるのは，$4-2n=-1$ を満たす整数 n はないので$p=-1$ となることはない。　したがって，求める確率は　0

4．2 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　目の和が 4 の倍数になる確率　　(2)　目の積が偶数になる確率

解答　(1)　$\frac{1}{4}$　　(2)　$\frac{3}{4}$

解説
目の出方の総数は　$6\times6=36$ (通り)

(1)　目の和が 4 の倍数になるのは，和が 4，8，12 となる 3 つの場合がある。

[1]　目の和が 4 になる場合は　(1，3)，(2，2)，(3，1)

[2]　目の和が 8 になる場合は　(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2)

[3]　目の和が 12 になる場合は　(6，6)

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}$$

(2)「目の積が偶数になる」という事象は，「目の積が奇数になる」という事象の余事象である。

目の積が奇数になる確率は　$\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$

よって，求める確率は　$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

5．1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 以上の目がちょうど 2 回出る確率

(2)　3 以上の目が出るのが 1 回以下である確率

解答　(1)　$\frac{40}{243}$　　(2)　$\frac{11}{243}$

解説
1 回投げて 3 以上の目が出る確率は　$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1)　${}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{40}{243}$

(2)　[1]　3 以上の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

[2]　3 以上の目がちょうど 1 回出る確率は

$${}_5C_1\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{243}+\frac{10}{243}=\frac{11}{243}$$

6．3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が 3 以下である確率　　(2)　出る目の最大値が 4 である確率

解答　(1)　$\frac{1}{8}$　　(2)　$\frac{37}{216}$

解説
(1)　出る目の最大値が 3 以下となるのは，それぞれの目が 3 以下のときである。

その場合の数は　3^3 通り

よって，求める確率は　$\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

(2)　さいころの目の，「最大値が 4 以下である」という事象を A，「最大値が 3 以下である」という事象を B，「最大値が 4 である」という事象を C とすると，最大値が 4 以下である確率$P(A)$は$\frac{4^3}{6^3}$，また最大値が3以下である確率$P(B)$は(1)より$\frac{3^3}{6^3}$

よって，求める確率は　$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$

7．1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が 3 回だけ出る確率　　(2)　表が 5 回以上出る確率

解答　(1)　$\frac{5}{16}$　　(2)　$\frac{7}{64}$

解説
1 枚の硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

(1)　${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(2)　[1]　表が 5 回だけ出る確率は　${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{64}\left(=\frac{3}{32}\right)$

[2]　表が 6 回だけ出る確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

8．1 組 52 枚のトランプから 1 枚取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　スペードまたは絵札が出る確率

(2)　偶数または 3 の倍数（絵札は除く）が出る確率

解答　(1)　$\dfrac{11}{26}$　　(2)　$\dfrac{7}{13}$

解説

(1)「スペードが出る」という事象を A，「絵札が出る」という事象を B とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である。

$$P(A)=\frac{13}{52},\quad P(B)=\frac{12}{52}$$

また，$A\cap B$ は「スペードの絵札が出る」という事象であるから　$P(A\cap B)=\dfrac{3}{52}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{13}{52}+\frac{12}{52}-\frac{3}{52}=\frac{11}{26}$$

(2)「偶数が出る」という事象を A，「3 の倍数が出る」という事象を B とすると

$$P(A)=\frac{20}{52},\quad P(B)=\frac{12}{52}$$

また，$A\cap B$ は「6 の倍数が出る」という事象であるから　$P(A\cap B)=\dfrac{4}{52}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{20}{52}+\frac{12}{52}-\frac{4}{52}=\frac{7}{13}$$

9．赤玉 2 個，青玉 3 個，黄玉 2 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　すべて青玉が出る確率　　(2)　赤玉 1 個と青玉 2 個が出る確率

(3)　どの色の玉も出る確率

解答　(1)　$\dfrac{1}{35}$　　(2)　$\dfrac{6}{35}$　　(3)　$\dfrac{12}{35}$

解説

7 個の玉から 3 個を取り出す組合せの数は　$_7C_3$ 通り

(1)　すべて青玉が出る場合の数は　$_3C_3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{_3C_3}{_7C_3}=\dfrac{1}{35}$

(2)　赤玉 1 個と青玉 2 個が出る場合の数は　$_2C_1\times{}_3C_2$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{_2C_1\times{}_3C_2}{_7C_3}=\dfrac{6}{35}$

(3)　どの色の玉も出るとは，赤玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ出るということである。

この場合の数は　$_2C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{_2C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1}{_7C_3}=\dfrac{12}{35}$

10. 1 から 7 までの番号札の中から同時に 5 枚取り出すとき，最大の数を X とする。X の期待値を求めよ。

解答　$\dfrac{20}{3}$

解説

X のとりうる値は 5，6，7 である。

7 枚の番号札から 5 枚取り出す方法の総数は　$_7C_5=21$（通り）

$X=5$ となるのは，5 の番号札を取り出し，残り4枚を4以下から取り出すので$_4C_4$通り。ゆえに，確率は$\dfrac{_4C_4}{_7C_5}$

$X=6$ となるのは，6 の番号札を取り出し，残り4枚を5以下から取り出すので$_5C_4$通り。ゆえに，確率は$\dfrac{_5C_4}{_7C_5}$

$X=7$ となるのは，7 の番号札を取り出し，残り4枚を6以下から取り出すので$_6C_4$通り。ゆえに，確率は$\dfrac{_6C_4}{_7C_5}$

よって，X の期待値は

$$5\times\frac{_4C_4}{21}+6\times\frac{_5C_4}{21}+7\times\frac{_6C_4}{21}=\frac{1}{21}(5+30+105)=\frac{140}{21}=\frac{20}{3}$$

11. 箱 A，B，C に赤玉と白玉が右の表の個数だけ入っている。各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出すとき，白玉がちょうど 2 個出る確率を求めよ。

	A	B	C
赤玉	3	2	1
白玉	1	2	3

解答　$\dfrac{13}{32}$

解説

各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出す試行は独立である。

[1]　箱 A，B から白玉，箱 C から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

[2]　箱 A，C から白玉，箱 B から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$$

[3]　箱 B，C から白玉，箱 A から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{32}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}=\frac{13}{32}$$

12. 5 枚の 10 円硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が 30 円のとき，このゲームに参加することは得であるか，損であるか。

解答　損である

解説

ゲームに参加したときに受け取る金額の期待値は

$$0\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+10\times{}_5C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4+20\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$+30\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+40\times{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{2}+50\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{10\cdot5+20\cdot10+30\cdot10+40\cdot5+50}{2^5}=25\ (\text{円})$$

これは参加料 30 円より少ないから，ゲームに参加することは損である。

13. A，B 2 人が，3 セット先取した方が勝ちとなるテニスの試合を行うとき，勝者が決まるまでのセット数の期待値を求めよ。ただし，2 人の力は互角であり，各セットにおいて引き分けはないものとする。

解答　$\dfrac{33}{8}$ セット

解説

3 セット目で A が勝者になるのは，1 セット目から A が 3 連勝する場合である。

よって，その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

4 セット目で A が勝者になるのは，3 セット目まで A が 2 勝 1 敗で，4 セット目に A が勝つ場合である。

よって，その確率は　$_3C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

5 セット目で A が勝者になるのは，4 セット目まで A が 2 勝 2 敗で，5 セット目に A が勝つ場合である。

よって，その確率は　$_4C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

B が勝者になる確率も同様である。

よって，3 セット目，4 セット目，5 セット目で勝者が決まる確率はそれぞれ

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\quad \frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8},\quad \frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

したがって，求める期待値は

$$3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}\ (\text{セット})$$