数学演習（確率）Ｈ２１．７．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の確率を求めよ。

(1)　1 個のさいころを 3 回投げて，出る目を左から 1 列に並べて 3 桁の整数を作るとき，5 の倍数ができる確率

(2)　3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 になる確率

2．袋の中に白玉 4 個，黒玉 5 個が入っている。玉を同時に 5 個取り出すとき

(1)　白玉が 2 個，黒玉が 3 個出る確率を求めよ。

(2)　同じ色の玉が 2 個出る確率を求めよ。

3．(1)　袋の中に白玉 4 個と黒玉 5 個が入っている。この袋から無作為に 1 個ずつ取り出し，もとへ戻さないとする。このようにしてすべての玉を取り出すとき，異なる色の玉が交互に出る確率を求めよ。

(2)　20 本のくじの中に，当たりくじが 5 本ある。このくじを a，b 2 人がこの順に，1 本ずつ 1 回だけ引くとき，a，b それぞれの当たる確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

4．1 から 9 までの番号札が各数字 3 枚ずつ計 27 枚ある。札をよくかき混ぜてから 2 枚取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　2 枚が同数字である確率

(2)　2 枚が同数字であるか，2 枚の数字の和が 5 以下である確率

5．(1)　ある高校の 1 年生 2 人，2 年生 2 人，3 年生 2 人の計 6 人の生徒が 1 列に並ぶとき，両端の少なくとも一方は 2 年生か 3 年生である確率を求めよ。

(2)　3 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ。

（ア）　2 人が勝ち，1 人が負ける確率　　（イ）　勝負がつかない確率

6．1 個のさいころを繰り返し 3 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　目の積が偶数になる確率

(2)　目の最小値が 2 以下である確率

(3)　目の最小値が 2 である確率

7．(1)　3本の当たりくじを含む10本のくじから，1本ずつ続けて2本引く。引いたくじはもとに戻さないとするとき，1本目がはずれて2本目が当たる確率を求めよ。

(2)　袋の中に，赤玉3個と白玉5個が入っている。A，Bの2人が，この順に1個ずつ玉を取り出すとき，A，Bが赤玉を取り出す確率をそれぞれ求めよ。ただし，取り出した玉はもとに戻さない。

8．(1)　1個のさいころと1枚の硬貨を同時に投げるとき，さいころは4以下の目が出て，硬貨は表が出る確率を求めよ。

(2)　Aの袋には白玉6個，黒玉4個，また，Bの袋には白玉8個，黒玉2個が入っている。いま，Aの袋から3個，Bの袋から2個の玉を取り出すとき，全部白玉である確率を求めよ。

9．赤玉5個，黒玉3個，白玉4個が入っている袋の中から，玉を1個取り出し，色を確認してから袋の中へ戻すという試行を考える。この試行を3回行ったとき，2回だけ同じ色となる確率を求めよ。

10．正しいものには○印を，正しくないものには×印をつける，いわゆる○×式の問題が10題ある。この問題において，○印と×印をでたらめにつけるとき

(1)　2題だけ正解する確率を求めよ。

(2)　3題以上正解する確率を求めよ。

11．2つのプロ野球チームA，Bが日本シリーズを戦った。ただし，引き分け試合はないものとし，先に4ゲームを勝ったチームが優勝する。1回の試合でAチームが勝つ確率を$\dfrac{2}{3}$とするとき

(1)　4ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

(2)　7ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

12．袋の中に赤玉3個，白玉2個，黒玉1個が入っている。この袋から玉を2個同時に取り出す。

(1)　少なくとも1個が赤玉である確率を求めよ。

(2)　赤玉1個につき1点，白玉1個につき2点，黒玉1個につき3点もらえる。このとき，もらえる合計点の期待値を求めよ。

数学演習（確率）Ｈ２１．７．１７ [解答•解説]　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の確率を求めよ。

(1) 1 個のさいころを 3 回投げて，出る目を左から 1 列に並べて 3 桁の整数を作るとき，5 の倍数ができる確率

(2) 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 になる確率

解説

1 個のさいころを 3 回投げるときの目の出方の総数と，3 個のさいころを同時に投げるときの目の出方の総数はともに同じで

6^3 通り

(1) 1 回目，2 回目，3 回目の目の数を順に x，y，z とする。

3 桁の整数が 5 の倍数であるのは，一の位の数が 0 か 5 の場合であるから，この場合は $z=5$ となるときで，x，y は 1 から 6 のどの数字でも構わない。

ゆえに，5 の倍数ができる場合の数は

$6\times6\times1=6^2$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6^2}{6^3}=\dfrac{1}{6}$

(2) 3 個のさいころの目の数を，x，y，z とする。

$x+y+z=5$ となる組 $(x,\ y,\ z)$ は，次の 6 通りである。

$(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 3,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 2)$，$(2,\ 2,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$

２．袋の中に白玉 4 個，黒玉 5 個が入っている。玉を同時に 5 個取り出すとき

(1) 白玉が 2 個，黒玉が 3 個出る確率を求めよ。

(2) 同じ色の玉が 2 個出る確率を求めよ。

解説

白玉と黒玉合わせて 9 個の中から 5 個を取り出す方法は

${}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$ (通り)

(1) 白玉 4 個から 2 個を取り出す方法は　${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

黒玉 5 個から 3 個を取り出す方法は　${}_5\mathrm{C}_3$ 通り

よって，白玉 2 個と黒玉 3 個を取り出す方法は

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=60$ (通り)

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_5}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

(2) 同じ色の玉が 2 個出るという事象は，2 つの事象

A：白玉が 2 個，黒玉が 3 個

B：白玉が 3 個，黒玉が 2 個

の和事象であり，これらは互いに排反である。

A が起こる確率は，(1) から　$P(A)=\dfrac{10}{21}$

B が起こる確率は　$P(B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_5}=\dfrac{4\times10}{126}=\dfrac{20}{63}$

ゆえに，求める確率は，確率の加法定理により

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{10}{21}+\dfrac{20}{63}=\dfrac{50}{63}$

３．(1) 袋の中に白玉 4 個と黒玉 5 個が入っている。この袋から無作為に 1 個ずつ取り出し，もとへ戻さないとする。このようにしてすべての玉を取り出すとき，異なる色の玉が交互に出る確率を求めよ。

(2) 20 本のくじの中に，当たりくじが 5 本ある。このくじを a，b 2 人がこの順に，1 本ずつ 1 回だけ引くとき，a，b それぞれの当たる確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

解説

(1) すべての玉の取り出し方の総数は　${}_9\mathrm{P}_9$ 通り

このうち，異なる色の玉が交互に出るのは，取り出した玉が左から順に

黒白黒白黒白黒白黒　となるときで，この事象が起こる場合の数は

${}_5\mathrm{P}_5\times{}_4\mathrm{P}_4$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_5\times{}_4\mathrm{P}_4}{{}_9\mathrm{P}_9}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6}=\dfrac{1}{126}$

(2) a が当たる確率は　$\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

次に，a，b 2 人がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，起こりうるすべての場合の数は

${}_{20}\mathrm{P}_2=380$ (通り)

このうち，b が当たる場合の数は

[1] a が当たり，b も当たる場合　${}_5\mathrm{P}_2=20$ (通り)

[2] a がはずれ，b が当たる場合　$15\times5=75$ (通り)

これら 2 つの場合は互いに排反である。

ゆえに，b が当たる確率は　$\dfrac{20}{380}+\dfrac{75}{380}=\dfrac{95}{380}=\dfrac{1}{4}$

４．1 から 9 までの番号札が各数字 3 枚ずつ計 27 枚ある。札をよくかき混ぜてから 2 枚取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 2 枚が同数字である確率

(2) 2 枚が同数字であるか，2 枚の数字の和が 5 以下である確率

解説

(1) 2 枚の札が同数字であるという事象を A とする。

27 枚の札の中から 2 枚の札を取り出す方法は

${}_{27}\mathrm{C}_2=\dfrac{27\cdot26}{2\cdot1}=351$ (通り)

取り出した 2 枚が同数字であるのは，同数字の 3 枚から 2 枚を取り出すときであるから，その場合の数は

$9\times{}_3\mathrm{C}_2=9\times3=27$ (通り)

ゆえに，求める確率 $P(A)$ は

$P(A)=\dfrac{27}{351}=\dfrac{1}{13}$

(2) 2 枚の札の数字の和が 5 以下であるという事象を B とする。

2 枚の数字の和が 5 以下である数の組は，次の 6 通りである。

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$

ゆえに，その場合の数は

$2\times{}_3\mathrm{C}_2+4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=42$ (通り)

また，2 枚が同数字で，かつ 2 枚の数字の和が 5 以下であるような数の組は $(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$ だけであるから

$n(A\cap B)=2\times{}_3\mathrm{C}_2=6$ (通り)

ゆえに，求める確率 $P(A\cup B)$ は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{13}+\frac{42}{351}-\frac{6}{351}=\frac{63}{351}=\frac{7}{39}$$

５．(1) ある高校の 1 年生 2 人，2 年生 2 人，3 年生 2 人の計 6 人の生徒が 1 列に並ぶとき，両端の少なくとも一方は 2 年生か 3 年生である確率を求めよ。

(2) 3 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ。

（ア） 2 人が勝ち，1 人が負ける確率　　（イ） 勝負がつかない確率

解説

(1) 6 人が 1 列に並ぶ方法は　${}_6\mathrm{P}_6=6!$ (通り)

両端に 2 人の 1 年生が並ぶ方法は

${}_2\mathrm{P}_2$ 通り

そのおのおのに対して，残り 4 人の並び方は

${}_4\mathrm{P}_4$ 通り

よって，両端が 2 人とも 1 年生である並び方は，積の法則から

${}_2\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_4$ 通り

ゆえに，両端が 2 人とも 1 年生である確率は

$\dfrac{{}_2\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_4}{6!}=\dfrac{2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{1}{15}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

(2) 3 人の手の出し方は　$3^3=27$ (通り)

（ア） 勝つ 2 人の手の出し方は 3 通りあり，そのおのおのに対して，負ける 1 人の手の出し方は 1 通りに決まる。

勝つ 2 人の選び方は　${}_3\mathrm{C}_2=3$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$

（イ） 「勝負がつかない」という事象の余事象は「勝負がつく」，すなわち「2 人が勝つか 2 人が負ける」であり，2 人が負ける確率は (ア) と同様に考えて　$\dfrac{1}{3}$

よって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

６．1 個のさいころを繰り返し 3 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 目の積が偶数になる確率

(2) 目の最小値が 2 以下である確率

(3) 目の最小値が 2 である確率

解説

1 個のさいころを繰り返し 3 回投げるとき，目の出方は

$6^3=216$ (通り)

(1) 目の積が偶数になるという事象の余事象は

目の積が奇数，すなわち 3 回とも奇数の目が出るという事象

であり，その確率は

$$\frac{3^3}{6^3}=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

(2) 目の最小値を A とする。

$A\leqq 2$ であるという事象の余事象は,

$A\geqq 3$ であるという事象,すなわち 3 回とも 3 以上の目が出るという事象

であり,その確率は

$$\frac{4^3}{6^3}=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$

よって,求める確率は　$1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

(3)　目の最小値が 2 以上である確率は　$\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$

よって,(2) から,求める確率は　$\frac{125}{216}-\frac{8}{27}=\frac{61}{216}$

7. (1)　3 本の当たりくじを含む 10 本のくじから,1 本ずつ続けて 2 本引く。引いたくじはもとに戻さないとするとき,1 本目がはずれて 2 本目が当たる確率を求めよ。

(2)　袋の中に,赤玉 3 個と白玉 5 個が入っている。A,B の 2 人が,この順に 1 個ずつ玉を取り出すとき,A,B が赤玉を取り出す確率をそれぞれ求めよ。ただし,取り出した玉はもとに戻さない。

解説

(1)　1 本目が当たるという事象を A とし,2 本目が当たるという事象を B とすると

$$P(\overline{A})=\frac{10-3}{10}=\frac{7}{10},\quad P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

よって,求める確率は

$$P(\overline{A}\cap B)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{30}$$

(2)　[1]　A が赤玉を取り出す確率

8 個中,赤玉が 3 個であるから　$\frac{3}{8}$

[2]　B が赤玉を取り出す確率

(A の玉の色,B の玉の色)=(赤,赤),(白,赤)

の 2 通りの事象があり,これらは互いに排反であるから

$$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{8}$$

8. (1)　1 個のさいころと 1 枚の硬貨を同時に投げるとき,さいころは 4 以下の目が出て,硬貨は表が出る確率を求めよ。

(2)　A の袋には白玉 6 個,黒玉 4 個,また,B の袋には白玉 8 個,黒玉 2 個が入っている。いま,A の袋から 3 個,B の袋から 2 個の玉を取り出すとき,全部白玉である確率を求めよ。

解説

(1)　さいころを投げたとき 4 以下の目が出る確率は　$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

硬貨を投げたとき表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

1 個のさいころを投げる試行と 1 枚の硬貨を投げる試行は独立であるから,求める確率は　$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

(2)　A の袋から白玉を 3 個取り出す確率は　$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$

B の袋から白玉を 2 個取り出す確率は　$\frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{28}{45}$

A の袋から玉を 3 個取り出す試行と B の袋から玉を 2 個取り出す試行は独立であるから,求める確率は　$\frac{1}{6}\times\frac{28}{45}=\frac{14}{135}$

9. 赤玉 5 個,黒玉 3 個,白玉 4 個が入っている袋の中から,玉を 1 個取り出し,色を確認してから袋の中へ戻すという試行を考える。この試行を 3 回行ったとき,2 回だけ同じ色となる確率を求めよ。

解説

題意の 3 回の試行は独立である。

3 回のうち,2 回だけ同じ色になるには,次の 3 つの場合があり,これらは互いに排反である。

[1]　赤玉が 2 回,他の色の玉が 1 回の場合

赤赤他,赤他赤,他赤赤の 3 通りであるから,[1] の場合の確率は

$$\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}\times 3=\frac{175}{576}$$

[2]　黒玉が 2 回,他の色の玉が 1 回の場合

[1] と同様に 3 通りであるから,[2] の場合の確率は

$$\frac{3}{12}\times\frac{3}{12}\times\frac{9}{12}\times 3=\frac{81}{576}$$

[3]　白玉が 2 回,他の色の玉が 1 回の場合

[1] と同様に 3 通りであるから,[3] の場合の確率は

$$\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}\times\frac{8}{12}\times 3=\frac{128}{576}$$

よって,求める確率は

$$\frac{175}{576}+\frac{81}{576}+\frac{128}{576}=\frac{384}{576}=\frac{2}{3}$$

10. 正しいものには○印を,正しくないものには×印をつける,いわゆる○×式の問題が 10 題ある。この問題において,○印と×印をでたらめにつけるとき

(1)　2 題だけ正解する確率を求めよ。

(2)　3 題以上正解する確率を求めよ。

解説

1 題につき,○印か×印をつけて正解となる確率は　$\frac{1}{2}$

また,不正解となる確率は　$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(1)　10 題中 2 題だけ正解する確率は

$${}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}=\frac{10\cdot 9}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{2^{10}}=\frac{45}{1024}$$

(2)　10 題中,正解が 2 題以下,すなわち正解が 0 または 1 または 2 題である確率は

$${}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{45}{2^{10}}$$

$$=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}=\frac{7}{128}$$

ゆえに,求める確率は　$1-\frac{7}{128}=\frac{121}{128}$

11. 2 つのプロ野球チーム A,B が日本シリーズを戦った。ただし,引き分け試合はないものとし,先に 4 ゲームを勝ったチームが優勝する。1 回の試合で A チームが勝つ確率を $\frac{2}{3}$ とするとき

(1)　4 ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

(2)　7 ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

解説

1 回の試合で B チームが勝つ確率は　$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(1)　4 ゲーム目で優勝チームが決まるのは

A チームが 4 連勝　または　B チームが 4 連勝

の場合であり,これらは互いに排反である。

よって,求める確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{17}{81}$

(2)　[1]　7 ゲーム目で A チームが優勝する場合

6 ゲーム目までに A チームが 3 勝し,7 ゲーム目に A チームが勝つときであるから,その確率は

$${}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{320}{2187}$$

[2]　7 ゲーム目で B チームが優勝する場合

[1] と同様にして　${}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{160}{2187}$

[1],[2] は互いに排反であるから,求める確率は

$$\frac{320}{2187}+\frac{160}{2187}=\frac{480}{2187}=\frac{160}{729}$$

12. 袋の中に赤玉 3 個,白玉 2 個,黒玉 1 個が入っている。この袋から玉を 2 個同時に取り出す。

(1)　少なくとも 1 個が赤玉である確率を求めよ。

(2)　赤玉 1 個につき 1 点,白玉 1 個につき 2 点,黒玉 1 個につき 3 点もらえる。このとき,もらえる合計点の期待値を求めよ。

解説

(1)　2 個とも赤玉でない確率は　$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

ゆえに,求める確率は　$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

(2)　合計点を X とし,$X=k$ のときの確率を p_k で表す。

$X=2$ のとき,2 個とも赤玉で　$p_2=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$

$X=3$ のとき,赤玉と白玉で　$p_3=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

$X=4$ のとき,赤玉と黒玉,および 2 個とも白玉で

$$p_4=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{3+1}{15}=\frac{4}{15}$$

$X=5$ のとき,白玉と黒玉で　$p_5=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$

$X=2,\ 3,\ 4,\ 5$ 以外はとりえないから,求める期待値は

$$2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{2}{15}=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}\ (点)$$