数学演習（確率）Ｈ２３．１１．２１　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　)

１．1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 3 以上の目がちょうど 2 回出る確率

(2) 3 以上の目が出るのが 1 回以下である確率

２．ハート 13 枚，スペード 13 枚の計 26 枚のトランプから同時に 3 枚を抜き取るとき

(1) 3 枚ともハートか，3 枚ともスペードが出る確率を求めよ。

(2) 出る絵札の枚数が 3 枚でない確率を求めよ。

３．2 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 目の和が 4 になる確率　　(2) 目の積が奇数になる確率

(3) 目の和が素数になる確率

４．1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき

(1) 番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2) 番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。

５．2 つの野球チーム A，B があり，A の B に対する勝率は 0.4 である。A と B が 3 連戦を行うとき，A が 2 勝 1 敗となる確率を求めよ。ただし，各試合において引き分けはないものとする

６．2 個のさいころを同時に投げるとき，次の X の期待値を求めよ。

(1) 出た目の差の絶対値 X　　(2) 出た目の和 X

7．1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が 3 回だけ出る確率　　(2)　表が 5 回以上出る確率

8．x 軸上に点 P がある。さいころを投げて，6 の約数の目が出たとき，P は x 軸の正の方向に 1 だけ進み，6 の約数でない目が出たとき，P は x 軸の負の方向に 1 だけ進むことにする。さいころを 4 回投げたとき，原点から出発した点 P が原点にある確率は ${}^{ア}\boxed{}$，$x=3$ の点にある確率は ${}^{イ}\boxed{}$，$x=-2$ の点にある確率は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

9．3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が 3 以下である確率　　(2)　出る目の最大値が 4 である確率

10. 8 冊のうち 2 冊は A 君の本である。これらの中から任意に 1 冊選び，もとに戻すことを 3 回繰り返すとき，A 君の本を選ぶ回数の期待値を求めよ。

11. 1 組 52 枚のトランプから 1 枚抜き取り，カードを見てからもとに戻すことを 2 回行うとき，次の確率を求めよ。

(1)　2 回ともハートが出る確率　　(2)　2 回目に初めてハートが出る確率

12. 2 つのプロ野球チーム A，B が日本シリーズを戦った。ただし，引き分け試合はないものとし，先に 4 ゲームを勝ったチームが優勝する。1 回の試合で A チームが勝つ確率を $\dfrac{2}{3}$ とするとき

(1)　4 ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

(2)　7 ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

数学演習（確率）Ｈ２３．１１．２１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 以上の目がちょうど 2 回出る確率

(2)　3 以上の目が出るのが 1 回以下である確率

解答　(1)　$\dfrac{40}{243}$　　(2)　$\dfrac{11}{243}$

解説

1 回投げて 3 以上の目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(1)　${}_5C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^3=10\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{40}{243}$

(2)　[1]　3 以上の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

[2]　3 以上の目がちょうど 1 回出る確率は

$${}_5C_1\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{243}+\frac{10}{243}=\frac{11}{243}$$

２．ハート 13 枚，スペード 13 枚の計 26 枚のトランプから同時に 3 枚を抜き取るとき

(1)　3 枚ともハートか，3 枚ともスペードが出る確率を求めよ。

(2)　出る絵札の枚数が 3 枚でない確率を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{11}{50}$　　(2)　$\dfrac{129}{130}$

解説

26 枚のトランプから 3 枚を抜き取る組合せは　${}_{26}C_3$ 通り

(1)　[1]　3 枚ともハートが出る確率は　$\dfrac{{}_{13}C_3}{{}_{26}C_3}$

[2]　3 枚ともスペードが出る確率は　$\dfrac{{}_{13}C_3}{{}_{26}C_3}$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{{}_{13}C_3}{{}_{26}C_3}+\frac{{}_{13}C_3}{{}_{26}C_3}=\frac{11}{100}+\frac{11}{100}=\frac{11}{50}$$

(2)　「出る絵札の枚数が 3 枚でない」という事象は，「絵札が 3 枚出る」という事象の余事象である。

絵札が 3 枚出る確率は　$\dfrac{{}_6C_3}{{}_{26}C_3}=\dfrac{1}{130}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{130}=\dfrac{129}{130}$

３．2 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　目の和が 4 になる確率　　(2)　目の積が奇数になる確率

(3)　目の和が素数になる確率

解答　(1)　$\dfrac{1}{12}$　　(2)　$\dfrac{1}{4}$　　(3)　$\dfrac{5}{12}$

解説

さいころの目の出方の総数は　$6\times6=36$（通り）

(1)　目の和が 4 になる場合は　(1，3)，(2，2)，(3，1) の　3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

(2)　目の積が奇数になる場合は

(1，1)，(1，3)，(1，5)，(3，1)，(3，3)，(3，5)，(5，1)，(5，3)，(5，5)

の 9 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(3)　目の和が素数になる場合は

(1，1)，(1，2)，(1，4)，(1，6)，(2，1)，(2，3)，(2，5)，(3，2)，(3，4)，

(4，1)，(4，3)，(5，2)，(5，6)，(6，1)，(6，5)

の 15 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

４．1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき

(1)　番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2)　番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{47}{100}$　　(2)　$\dfrac{53}{100}$

解説

(1)　番号が「3 の倍数である」という事象を A，「5 の倍数である」という事象を B とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$，

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{6}{100}=\frac{47}{100}$$

(2)　求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{100}=\frac{53}{100}$$

５．2 つの野球チーム A，B があり，A の B に対する勝率は 0.4 である。A と B が 3 連戦を行うとき，A が 2 勝 1 敗となる確率を求めよ。ただし，各試合において引き分けはないものとする

解答　$\dfrac{36}{125}$

解説

1 回の試合で，A が勝つ確率は　$0.4=\dfrac{2}{5}$

よって，求める確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=3\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$

６．2 個のさいころを同時に投げるとき，次の X の期待値を求めよ。

(1)　出た目の差の絶対値 X　　(2)　出た目の和 X

解答　(1)　$\dfrac{35}{18}$　　(2)　7

解説

(1)　2 個のさいころ A，B の目の差の絶対値は，右の表のようになる。

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

したがって，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は次の表のようになる。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

よって，求める期待値は

$$(2+12)\times\frac{1}{36}+(3+11)\times\frac{2}{36}+(4+10)\times\frac{3}{36}+(5+9)\times\frac{4}{36}+(6+8)\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$$

$$=\frac{14}{36}(1+2+3+4+5+3)=7$$

7．1枚の硬貨を6回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が3回だけ出る確率　　　(2)　表が5回以上出る確率

解答　(1)　$\frac{5}{16}$　　(2)　$\frac{7}{64}$

解説

1枚の硬貨を1回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

(1)　${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(2)　[1]　表が5回だけ出る確率は　${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{64}\left(=\frac{3}{32}\right)$

[2]　表が6回だけ出る確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

8．x 軸上に点Pがある。さいころを投げて，6の約数の目が出たとき，Pは x 軸の正の方向に1だけ進み，6の約数でない目が出たとき，Pは x 軸の負の方向に1だけ進むことにする。さいころを4回投げたとき，原点から出発した点Pが原点にある確率は $^{ア}\boxed{}$，$x=3$ の点にある確率は $^{イ}\boxed{}$，$x=-2$ の点にある確率は $^{ウ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\frac{8}{27}$　　(イ)　0　　(ウ)　$\frac{8}{81}$

解説

さいころを1回投げたとき，6の約数の目すなわち1，2，3，6が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

さいころを4回投げたとき，6の約数の目が r 回出る確率は

$${}_4C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{4-r}\quad\cdots\cdots①$$

また，このとき点Pの x 座標は

$$x=1\cdot r+(-1)\cdot(4-r)$$
$$=2r-4\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(ア)　Pが原点 $(x=0)$ にあるとき

$2r-4=0$　　よって　$r=2$

ゆえに，① から，求める確率は　${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(イ)　Pが $x=3$ の点にあるとき

$2r-4=3$ を満たす正の整数 r は存在しない。

ゆえに，求める確率は　0

(ウ)　Pが $x=-2$ の点にあるとき

$2r-4=-2$　　よって　$r=1$

ゆえに，① から，求める確率は　${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

9．3個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が3以下である確率　　(2)　出る目の最大値が4である確率

解答　(1)　$\frac{1}{8}$　　(2)　$\frac{37}{216}$

解説

(1)　出る目の最大値が3以下となるのは，それぞれの目が3以下のときである。

その場合の数は　3^3 通り

よって，求める確率は　$\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

(2)　さいころの目の，「最大値が4以下である」という事象を A，「最大値が3以下である」という事象を B，「最大値が4である」という事象を C とすると，最大値が4以下である確率 $P(A)$ は $\frac{4^3}{6^3}$，また最大値が3以下である確率 $P(B)$ は(1)より $\frac{3^3}{6^3}$

よって，求める確率は　$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$

10．8冊のうち2冊はA君の本である。これらの中から任意に1冊選び，もとに戻すことを3回繰り返すとき，A君の本を選ぶ回数の期待値を求めよ。

解答　$\frac{3}{4}$ 回

解説

A君の本を選ぶ回数は，0回，1回，2回，3回の場合がある。

0回である確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

1回である確率は　${}_3C_1\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$

2回である確率は　${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$

3回である確率は　$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}\ (回)$$

11．1組52枚のトランプから1枚抜き取り，カードを見てからもとに戻すことを2回行うとき，次の確率を求めよ。

(1)　2回ともハートが出る確率　　(2)　2回目に初めてハートが出る確率

解答　(1)　$\frac{1}{16}$　　(2)　$\frac{3}{16}$

解説

1回目にカードを抜き取る試行と，2回目にカードを抜き取る試行は独立である。

(1)　$\frac{13}{52}\times\frac{13}{52}=\frac{1}{16}$

(2)　1回目にハートでないカードが出て，2回目にハートが出ればよいから

$$\left(1-\frac{13}{52}\right)\times\frac{13}{52}=\frac{3}{16}$$

12．2つのプロ野球チームA，Bが日本シリーズを戦った。ただし，引き分け試合はないものとし，先に4ゲームを勝ったチームが優勝する。1回の試合でAチームが勝つ確率を $\frac{2}{3}$ とするとき

(1)　4ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

(2)　7ゲーム目で優勝チームが決まる確率を求めよ。

解答　(1)　$\frac{17}{81}$　　(2)　$\frac{160}{729}$

解説

1回の試合でBチームが勝つ確率は　$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(1)　4ゲーム目で優勝チームが決まるのは

Aチームが4連勝　または　Bチームが4連勝

の場合であり，これらは互いに排反である。

よって，求める確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{17}{81}$

(2)　[1]　7ゲーム目でAチームが優勝する場合

6ゲーム目までにAチームが3勝し，7ゲーム目にAチームが勝つときであるから，その確率は

$${}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{320}{2187}$$

[2]　7ゲーム目でBチームが優勝する場合

[1] と同様にして　${}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{160}{2187}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{320}{2187}+\frac{160}{2187}=\frac{480}{2187}=\frac{160}{729}$$