数学演習（確率）Ｈ２３．１１．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．A，B，C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ。

(1) A だけが負ける確率　　(2) 1 人だけが勝つ確率

2．袋の中に白玉 3 個，赤玉 4 個が入っている。A，B，C の 3 人がこの順に 1 個ずつ玉を取り出すとき，少なくとも 1 人 が赤玉を取り出す確率を求めよ。ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする。

3．A，B，C の 3 人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$ であるとする。3 人のうち，少なくとも 1 人が合格する確率を求めよ。

4．MONDAY の 6 文字をでたらめに 1 列に並べるとき

(1) O が左端，A が右端に並ぶ確率を求めよ。

(2) 母音が両端に並ぶ確率を求めよ。

5．1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき

(1) 番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2) 番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。

6．10 本のうち当たりが 3 本入ったくじから同時に 4 本引くとき

(1) 当たりくじを 2 本以上引く確率を求めよ。

(2) 少なくとも 1 本は当たりくじを引く確率を求めよ。

7．赤玉 5 個，白玉 4 個，黄玉 3 個が入った袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 黄玉が 2 個以上出る確率　　(2) 3 個とも同じ色の玉が出る確率

8．3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が 3 以下である確率　　(2)　出る目の最大値が 4 である確率

9．数直線上の原点に点 P がある。P を，1 個のさいころを投げて，1 または 6 の目が出たら負の方向に 1 だけ，それ以外の目が出たら正の方向に 1 だけ移動する。さいころを 4 回投げた後，P の座標 $p$ が次のようになる確率を求めよ。

(1)　$p=0$　　(2)　$p=-1$

10. 1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 以上の目がちょうど 2 回出る確率

(2)　3 以上の目が出るのが 1 回以下である確率

11. 1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が 3 回だけ出る確率　　(2)　表が 5 回以上出る確率

12. 袋の中に赤玉 1 個，黄玉 2 個，青玉 3 個が入っている。1 個取り出してもとに戻す試行を 3 回行うとき，それぞれの色が 1 回ずつ出る確率を求めよ。

13. 赤玉 3 個，白玉 2 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が出る個数を $X$ とする。$X$ の期待値を求めよ。

1．A，B，C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ。

(1)　A だけが負ける確率　　(2)　1 人だけが勝つ確率

解答 (1) $\dfrac{1}{9}$　(2) $\dfrac{1}{3}$

解説

3 人の手の出し方の総数は　$3\times3\times3=27$（通り）

(1)　A だけが負ける場合は

A がグー，B，C はパー，　A がチョキ，B，C はグー，

A がパー，B，C はチョキ

の 3 通りある。よって，求める確率は　$\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

(2)　1 人だけが勝つ場合，勝者の決まり方は，A か B か C かの 3 通りある。

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$

2．袋の中に白玉 3 個，赤玉 4 個が入っている。A，B，C の 3 人がこの順に 1 個ずつ玉を取り出すとき，少なくとも 1 人 が赤玉を取り出す確率を求めよ。ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする。

解答 $\dfrac{34}{35}$

解説

A，B，C の 3 人とも白玉を取り出す確率は　$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{5}$

「少なくとも 1 人 が赤玉を取り出す」という事象は，「A，B，C の 3 人とも白玉を取り出す」という事象の余事象である。

よって，求める確率は　$1-\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{34}{35}$

3．A，B，C の 3 人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{8}$ であるとする。3 人のうち，少なくとも 1 人が合格する確率を求めよ。

解答 $\dfrac{61}{64}$

解説

「少なくとも 1 人が合格する」という事象は，「3 人とも不合格となる」という事象の余事象である。A,B,Cが不合格となる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}$ より

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{61}{64}$

4．MONDAY の 6 文字をでたらめに 1 列に並べるとき

(1)　O が左端，A が右端に並ぶ確率を求めよ。

(2)　母音が両端に並ぶ確率を求めよ。

解答 (1) $\dfrac{1}{30}$　(2) $\dfrac{1}{15}$

解説

6 文字を 1 列に並べる並べ方は　${}_6P_6=6!$（通り）

(1)　左端に O，右端に A を並べ，その間に残りの 4 文字を並べる並べ方は

${}_4P_4=4!$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{4!}{6!}=\dfrac{1}{30}$

(2)　母音 O，A を両端に並べる並べ方は　${}_2P_2=2!$（通り）

そのおのおのに対して，間に並べる 4 つの子音の並べ方は　${}_4P_4=4!$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{2!\times4!}{6!}=\dfrac{1}{15}$

5．1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき

(1)　番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2)　番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。

解答 (1) $\dfrac{47}{100}$　(2) $\dfrac{53}{100}$

解説

(1)　番号が「3 の倍数である」という事象を $A$，「5 の倍数である」という事象を $B$ とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$,

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$,

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{6}{100}=\frac{47}{100}$$

(2)　求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{100}=\frac{53}{100}$$

6．10 本のうち当たりが 3 本入ったくじから同時に 4 本引くとき

(1)　当たりくじを 2 本以上引く確率を求めよ。

(2)　少なくとも 1 本は当たりくじを引く確率を求めよ。

解答 (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{5}{6}$

解説

10 本のくじから 4 本引く組合せは　${}_{10}C_4$ 通り

(1)　当たりくじを 2 本以上引くという事象は

$A$：当たりくじを 2 本引く　　$B$：当たりくじを 3 本引く

という 2 つの事象の和事象 $A\cup B$ である。

$$P(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{63}{210},\quad P(B)=\frac{{}_3C_3\times{}_7C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{7}{210}$$

$A$，$B$ は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{63}{210}+\frac{7}{210}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$$

(2)　「少なくとも 1 本は当たる」という事象は，「4 本ともはずれる」という事象の余事象である。

4 本ともはずれる確率は　$\dfrac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\dfrac{1}{6}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

7．赤玉 5 個，白玉 4 個，黄玉 3 個が入った袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　黄玉が 2 個以上出る確率　　(2)　3 個とも同じ色の玉が出る確率

解答 (1) $\dfrac{7}{55}$　(2) $\dfrac{3}{44}$

解説

12 個の玉から 3 個を取り出す組合せは　${}_{12}C_3$ 通り

(1)　「黄玉が 2 個以上出る」という事象は

$A$：黄玉が 2 個出る　　$B$：黄玉が 3 個出る

という 2 つの事象の和事象 $A\cup B$ で表される。

$$P(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_9C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{3\times9}{220}=\frac{27}{220},\quad P(B)=\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$$

$A$，$B$ は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{27}{220}+\frac{1}{220}=\frac{7}{55}$$

(2)　「3 個とも同じ色の玉が出る」という事象は，「3 個とも赤玉が出る」，「3 個とも白玉が出る」，「3 個とも黄玉が出る」の 3 つの事象の和事象で表され，この 3 つの事象は互いに排反である。

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{10}{220}+\dfrac{4}{220}+\dfrac{1}{220}=\dfrac{3}{44}$

8．3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が 3 以下である確率　　(2)　出る目の最大値が 4 である確率

**解答**　(1)　$\frac{1}{8}$　　(2)　$\frac{37}{216}$

**解説**

(1)　出る目の最大値が 3 以下となるのは，それぞれの目が 3 以下のときである。

その場合の数は　　$3^3$ 通り

よって，求める確率は　　$\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

(2)　さいころの目の，「最大値が 4 以下である」という事象を $A$，「最大値が 3 以下である」という事象を $B$，「最大値が 4 である」という事象を $C$ とすると，最大値が 4 以下である確率$P(A)$は $\frac{4^3}{6^3}$，また最大値が3以下である確率$P(B)$は(1)より$\frac{3^3}{6^3}$

よって，求める確率は　　$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$

9．数直線上の原点に点 P がある。P を，1 個のさいころを投げて，1 または 6 の目が出たら負の方向に 1 だけ，それ以外の目が出たら正の方向に 1 だけ移動する。さいころを 4 回投げた後，P の座標 $p$ が次のようになる確率を求めよ。

(1)　$p=0$　　　　(2)　$p=-1$

**解答**　(1)　$\frac{8}{27}$　　(2)　0

**解説**

4 回のうち，1 または 6 の目が出た回数を $n$ とすると，点Pの座標$p$は

$(-1)$が$n$回で$(+1)$が$4-n$回より

$p=(-1)\cdot n+1\cdot(4-n)$　　すなわち　　$p=4-2n$

(1)　$p=0$となるのは　$4-2n=0$ を解くと　　$n=2$

よって，さいころを 4 回投げた後，$p=0$ となるのは，1 または 6 の目が 2 回出たときである。

したがって，求める確率は　　${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(2)　$p=-1$となるのは，$4-2n=-1$ を満たす整数 $n$ はないので$p=-1$ となることはない。　したがって，求める確率は　　0

10．1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 以上の目がちょうど 2 回出る確率

(2)　3 以上の目が出るのが 1 回以下である確率

**解答**　(1)　$\frac{40}{243}$　　(2)　$\frac{11}{243}$

**解説**

1 回投げて 3 以上の目が出る確率は　　$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1)　${}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{40}{243}$

(2)　[1]　3 以上の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

[2]　3 以上の目がちょうど 1 回出る確率は

$${}_5C_1\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{243}+\frac{10}{243}=\frac{11}{243}$$

11．1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が 3 回だけ出る確率　　　　(2)　表が 5 回以上出る確率

**解答**　(1)　$\frac{5}{16}$　　(2)　$\frac{7}{64}$

**解説**

1 枚の硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　　$\frac{1}{2}$

(1)　${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(2)　[1]　表が 5 回だけ出る確率は　　${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{64}\left(=\frac{3}{32}\right)$

[2]　表が 6 回だけ出る確率は　　$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

12．袋の中に赤玉 1 個，黄玉 2 個，青玉 3 個が入っている。1 個取り出してもとに戻す試行を 3 回行うとき，それぞれの色が 1 回ずつ出る確率を求めよ。

**解答**　$\frac{1}{6}$

**解説**

各回の玉を取り出す試行は独立である。

1 個玉を取り出すとき，赤玉，黄玉，青玉が出る確率は，それぞれ　　$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$

3 回玉を取り出すとき，赤玉，黄玉，青玉が 1 個ずつ出る出方は ${}_3P_3$ 通りあり，各場合は互いに排反である。

よって，求める確率は　　$\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\right)\times{}_3P_3=\frac{1}{6}$

13．赤玉 3 個，白玉 2 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が出る個数を $X$ とする。$X$ の期待値を求めよ。

**解答**　$\frac{9}{5}$

**解説**

$X$ のとりうる値は 1，2，3 である。

各値について，$X$ がその値をとる確率は

$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$，　$\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$，

$\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

よって，求める期待値は

$$1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$$