数学演習（確率）Ｈ２３．１１．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1．10 本のうち当たりが 3 本入ったくじから同時に 4 本引くとき
(1)　当たりくじを 2 本以上引く確率を求めよ。
(2)　少なくとも 1 本は当たりくじを引く確率を求めよ。

2．1 組 52 枚のトランプから 1 枚取り出すとき，次の確率を求めよ。
(1)　スペードまたは絵札が出る確率
(2)　偶数または 3 の倍数（絵札は除く）が出る確率

3．1 から 10 までの自然数から異なる 3 個の数を選び出すとき，最大の数が 8 で，かつ最小の数が 4 以下である確率を求めよ。

4．1 個のさいころを何回か投げるとき，次の確率を求めよ。
(1)　5 回投げて，3 の倍数の目がちょうど 2 回出る確率
(2)　7 回投げて，偶数の目が 6 回以上出る確率

5．A，B，C の 3 人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$ であるとする。3 人のうち，少なくとも 1 人が合格する確率を求めよ。

6．3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。
(1)　出る目の最大値が 3 以下である確率　　(2)　出る目の最大値が 4 である確率

7．赤玉 3 個，白玉 2 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が出る個数を X とする。X の期待値を求めよ。

8．5 枚の 10 円硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が 30 円のとき，このゲームに参加することは得であるか，損であるか。

9．数直線上の原点に点 P がある。P を，1 個のさいころを投げて，1 または 6 の目が出たら負の方向に 1 だけ，それ以外の目が出たら正の方向に 1 だけ移動する。さいころを 4 回投げた後，P の座標 p が次のようになる確率を求めよ。
(1)　$p=0$　　(2)　$p=-1$

10. 1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，次の確率を求めよ。
(1)　表が 3 回だけ出る確率　　(2)　表が 5 回以上出る確率

11. 1 から 7 までの番号札の中から同時に 5 枚取り出すとき，最大の数を X とする。
X の期待値を求めよ。

12. 8 冊のうち 2 冊は A 君の本である。これらの中から任意に 1 冊選び，もとに戻すことを 3 回繰り返すとき，A 君の本を選ぶ回数の期待値を求めよ。

13. 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の X の期待値を求めよ。
(1)　出た目の差の絶対値 X　　(2)　出た目の和 X

14. 7 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。これを A，B，C の 3 人がこの順に引くとき，A が当たる確率，および次の確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。
(1)　A と C が当たる確率　　(2)　A が当たり，B がはずれる確率

15. 袋の中に白玉 3 個，赤玉 4 個が入っている。A，B，C の 3 人がこの順に 1 個ずつ玉を取り出すとき，少なくとも 1 人 が赤玉を取り出す確率を求めよ。ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする。

16. 袋の中に赤玉 1 個，黄玉 2 個，青玉 3 個が入っている。1 個取り出してもとに戻す試行を 3 回行うとき，それぞれの色が 1 回ずつ出る確率を求めよ。

17. 座標平面上を動く点 P が原点 O にある。1 回の移動において確率 $\frac{2}{3}$ で x 軸方向に 1，確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸方向に 1 だけ移動する。5 回の移動後に P が点 (3，2) にいる確率を求めよ。

18. 箱 A，B，C に赤玉と白玉が右の表の個数だけ入っている。各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出すとき，白玉がちょうど 2 個出る確率を求めよ。

	A	B	C
赤玉	3	2	1
白玉	1	2	3

1．10本のうち当たりが3本入ったくじから同時に4本引くとき

(1)　当たりくじを2本以上引く確率を求めよ。

(2)　少なくとも1本は当たりくじを引く確率を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{3}$　　(2)　$\frac{5}{6}$

解説

10本のくじから4本引く組合せは　${}_{10}C_4$ 通り

(1)　当たりくじを2本以上引くという事象は

A：当たりくじを2本引く　　　B：当たりくじを3本引く

という2つの事象の和事象 $A\cup B$ である。

$$P(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{63}{210},\quad P(B)=\frac{{}_3C_3\times{}_7C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{7}{210}$$

A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{63}{210}+\frac{7}{210}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$$

(2)「少なくとも1本は当たる」という事象は，「4本ともはずれる」という事象の余事象である。

4本ともはずれる確率は　$\frac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

よって，求める確率は　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

2．1組52枚のトランプから1枚取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　スペードまたは絵札が出る確率

(2)　偶数または3の倍数（絵札は除く）が出る確率

解答　(1)　$\frac{11}{26}$　　(2)　$\frac{7}{13}$

解説

(1)「スペードが出る」という事象を A，「絵札が出る」という事象を B とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である。

$$P(A)=\frac{13}{52},\quad P(B)=\frac{12}{52}$$

また，$A\cap B$ は「スペードの絵札が出る」という事象であるから　$P(A\cap B)=\frac{3}{52}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{13}{52}+\frac{12}{52}-\frac{3}{52}=\frac{11}{26}$$

(2)「偶数が出る」という事象を A，「3の倍数が出る」という事象を B とすると

$$P(A)=\frac{20}{52},\quad P(B)=\frac{12}{52}$$

また，$A\cap B$ は「6の倍数が出る」という事象であるから　$P(A\cap B)=\frac{4}{52}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{20}{52}+\frac{12}{52}-\frac{4}{52}=\frac{7}{13}$$

3．1から10までの自然数から異なる3個の数を選び出すとき，最大の数が8で，かつ最小の数が4以下である確率を求めよ。

解答　$\frac{3}{20}$

解説

3個の数を選び出す方法は　${}_{10}C_3$ 通り

最大の数が8である確率は，1個が8で，他の2個を1から7までの7個から選ぶから

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_3}$$

また，最大の数が8であり，かつ最小の数が5以上である確率は，1個が8で，他の2個を5，6，7の3個から選ぶから

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_3}$$

よって，最大の数が8で，最小の数が4以下である確率は

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_3}-\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{120}-\frac{3}{120}=\frac{3}{20}$$

4．1個のさいころを何回か投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　5回投げて，3の倍数の目がちょうど2回出る確率

(2)　7回投げて，偶数の目が6回以上出る確率

解答　(1)　$\frac{80}{243}$　　(2)　$\frac{1}{16}$

解説

(1)　1回投げて3の倍数の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{3^5}=\frac{80}{243}$

(2)　1回投げて偶数の目が出る確率は　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

偶数の目が6回以上出るのは，6回または7回出る場合である。

よって，求める確率は　${}_7C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=\frac{1}{16}$

5．A，B，Cの3人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$ であるとする。3人のうち，少なくとも1人が合格する確率を求めよ。

解答　$\frac{61}{64}$

解説

「少なくとも1人が合格する」という事象は，「3人とも不合格となる」という事象の余事象である。A,B,Cが不合格となる確率はそれぞれ $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{8}$ より

よって，求める確率は　$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{61}{64}$

6．3個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最大値が3以下である確率　(2)　出る目の最大値が4である確率

解答　(1)　$\frac{1}{8}$　　(2)　$\frac{37}{216}$

解説

(1)　出る目の最大値が3以下となるのは，それぞれの目が3以下のときである。

その場合の数は　3^3 通り

よって，求める確率は　$\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

(2)　さいころの目の，「最大値が4以下である」という事象を A，「最大値が3以下である」という事象を B，「最大値が4である」という事象を C とすると，最大値が4以下である確率 $P(A)$ は $\frac{4^3}{6^3}$，また最大値が3以下である確率 $P(B)$ は(1)より $\frac{3^3}{6^3}$

よって，求める確率は　$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$

7．赤玉3個，白玉2個が入った袋から3個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が出る個数を X とする。X の期待値を求めよ。

解答　$\frac{9}{5}$

解説

X のとりうる値は1，2，3である。

各値について，X がその値をとる確率は

$$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10},\quad\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{6}{10},\quad\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

X	1	2	3	計
確率	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

よって，求める期待値は

$$1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$$

8．5枚の10円硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が30円のとき，このゲームに参加することは得であるか，損であるか。

解答　損である

解説

ゲームに参加したときに受け取る金額の期待値は

$$0\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+10\times{}_5C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4+20\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$+30\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+40\times{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{2}+50\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{10\cdot5+20\cdot10+30\cdot10+40\cdot5+50}{2^5}=25\text{（円）}$$

これは参加料30円より少ないから，ゲームに参加することは損である。

9．数直線上の原点に点Pがある。Pを，1個のさいころを投げて，1または6の目が出たら負の方向に1だけ，それ以外の目が出たら正の方向に1だけ移動する。さいころを4回投げた後，Pの座標 p が次のようになる確率を求めよ。

(1)　$p=0$　　　(2)　$p=-1$

解答　(1)　$\frac{8}{27}$　　(2)　0

解説

4回のうち，1または6の目が出た回数を n とすると，点Pの座標 p は

(-1) が n 回で $(+1)$ が $4-n$ 回より

$p=(-1)\cdot n+1\cdot(4-n)$　　すなわち　$p=4-2n$

(1)　$p=0$ となるのは　$4-2n=0$ を解くと　$n=2$

よって，さいころを4回投げた後，$p=0$ となるのは，1または6の目が2回出たときである。

したがって，求める確率は　${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(2)　$p=-1$ となるのは，$4-2n=-1$ を満たす整数 n はないので $p=-1$ となることはない。　したがって，求める確率は　0

10．1枚の硬貨を6回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　表が3回だけ出る確率　　(2)　表が5回以上出る確率

解答　(1)　$\frac{5}{16}$　　(2)　$\frac{7}{64}$

解説

1 枚の硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

(1)　${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(2)　[1]　表が 5 回だけ出る確率は　${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{64}\left(=\frac{3}{32}\right)$

[2]　表が 6 回だけ出る確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

11. 1 から 7 までの番号札の中から同時に 5 枚取り出すとき，最大の数を X とする。X の期待値を求めよ。

解答　$\frac{20}{3}$

解説

X のとりうる値は 5，6，7 である。

7 枚の番号札から 5 枚取り出す方法の総数は　${}_7C_5=21$（通り）

$X=5$ となるのは，5 の番号札を取り出し，残り4枚を4以下から取り出すので${}_4C_4$通り。ゆえに，確率は$\frac{{}_4C_4}{{}_7C_5}$

$X=6$ となるのは，6 の番号札を取り出し，残り4枚を5以下から取り出すので${}_5C_4$通り。ゆえに，確率は$\frac{{}_5C_4}{{}_7C_5}$

$X=7$ となるのは，7 の番号札を取り出し，残り4枚を6以下から取り出すので${}_6C_4$通り。ゆえに，確率は$\frac{{}_6C_4}{{}_7C_5}$

よって，X の期待値は

$$5\times\frac{{}_4C_4}{21}+6\times\frac{{}_5C_4}{21}+7\times\frac{{}_6C_4}{21}=\frac{1}{21}(5+30+105)=\frac{140}{21}=\frac{20}{3}$$

12. 8 冊のうち 2 冊は A 君の本である。これらの中から任意に 1 冊選び，もとに戻すことを 3 回繰り返すとき，A 君の本を選ぶ回数の期待値を求めよ。

解答　$\frac{3}{4}$ 回

解説

A 君の本を選ぶ回数は，0 回，1 回，2 回，3 回 の場合がある。

0 回である確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

1 回である確率は　${}_3C_1\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$

2 回である確率は　${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$

3 回である確率は　$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}\ (回)$$

13. 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の X の期待値を求めよ。

(1)　出た目の差の絶対値 X　　(2)　出た目の和 X

解答　(1)　$\frac{35}{18}$　(2)　7

解説

(1)　2 個のさいころ A，B の目の差の絶対値は，右の表のようになる。

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

したがって，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は次の表のようになる。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

よって，求める期待値は

$$(2+12)\times\frac{1}{36}+(3+11)\times\frac{2}{36}+(4+10)\times\frac{3}{36}+(5+9)\times\frac{4}{36}+(6+8)\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$$

$$=\frac{14}{36}(1+2+3+4+5+3)=7$$

14. 7 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。これを A，B，C の 3 人がこの順に引くとき，A が当たる確率，および次の確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

(1)　A と C が当たる確率　　(2)　A が当たり，B がはずれる確率

解答　A が当たる確率　$\frac{3}{7}$　(1)　$\frac{1}{7}$　(2)　$\frac{2}{7}$

解説

A が当たる場合は，A はくじ7本から当たりくじ 3 本のうち 1 本を引き，B は残り6本から何を引いてもよく，Cも残り5本から何を引いてもよい。

A　B　C
当　＊　＊

よって，A が当たる確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{3}{7}$

(1)　A と C が当たる場合は，次の 2 通りある

（あ）Bも当たりくじを引く場合

A　B　C
当　当　当

A はくじ7本から当たりくじ 3 本のうち 1 本を引き，

B は残り6本から当たり2本のうち1本を引き，Cも残り5本から当たりくじ1本を引く。ゆえに確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$

（い）Bははずれくじを引く場合

A　B　C
当　は　当

A はくじ7本から当たりくじ 3 本のうち 1 本を引き，

B は残り6本からはずれ4本のうち1本を引き，Cも残り5本から当たりくじ2本のうち1本引く。ゆえに確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}$

（あ）と（い）から，求める確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{7}$

(2)　A が当たり，B がはずれる場合は，A は当たりくじ 3 本から 1 本を引き，B ははずれくじ 4 本から 1 本を引き，C は残りの 5 本から何でもいいので 1 本を引くから求める確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2}{7}$

A　B　C
当　は　＊

15. 袋の中に白玉 3 個，赤玉 4 個が入っている。A，B，C の 3 人がこの順に 1 個ずつ玉を取り出すとき，少なくとも 1 人 が赤玉を取り出す確率を求めよ。ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする。

解答　$\frac{34}{35}$

解説

A，B，C の 3 人とも白玉を取り出す確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$

「少なくとも 1 人が赤玉を取り出す」という事象は，「A，B，C の 3 人とも白玉を取り出す」という事象の余事象である。

よって，求める確率は　$1-\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{34}{35}$

16. 袋の中に赤玉 1 個，黄玉 2 個，青玉 3 個が入っている。1 個取り出してもとに戻す試行を 3 回行うとき，それぞれの色が 1 回ずつ出る確率を求めよ。

解答　$\frac{1}{6}$

解説

各回の玉を取り出す試行は独立である。

1 個玉を取り出すとき，赤玉，黄玉，青玉が出る確率は，それぞれ　$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$

3 回玉を取り出すとき，赤玉，黄玉，青玉が 1 個ずつ出る出方は ${}_3P_3$ 通りあり，各場合は互いに排反である。

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\right)\times{}_3P_3=\frac{1}{6}$

17. 座標平面上を動く点 P が原点 O にある。1 回の移動において確率 $\frac{2}{3}$ で x 軸方向に 1，確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸方向に 1 だけ移動する。5 回の移動後に P が点 (3，2) にいる確率を求めよ。

解答　$\frac{80}{243}$

解説

5 回の移動後に点 (3，2) にいるのは，x 軸方向に 3 回，y 軸方向に 2 回移動したときである。

よって，求める確率は　${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=10\times\frac{8}{3^5}=\frac{80}{243}$

18. 箱 A，B，C に赤玉と白玉が右の表の個数だけ入っている。各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出すとき，白玉がちょうど 2 個出る確率を求めよ。

	A	B	C
赤玉	3	2	1
白玉	1	2	3

解答　$\frac{13}{32}$

解説

各箱の中から玉を 1 個ずつ取り出す試行は独立である。

[1]　箱 A，B から白玉，箱 C から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

[2]　箱 A，C から白玉，箱 B から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$$

[3]　箱 B，C から白玉，箱 A から赤玉が出る場合，その確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{32}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}=\frac{13}{32}$$