

1 次の確率を求めよ。

- (1) 2個のさいころを投げるとき、目の和が素数である確率
- (2) 3枚の硬貨を投げて、表1枚、裏2枚が出る確率

2 赤、青、黄の札が4枚ずつあり、どの色の札にも1から4までの番号が1つずつ書かれている。この12枚の札から無作為に3枚取り出したとき、次のことが起こる確率を求めよ。

- (1) 全部同じ色になる。
- (2) 番号が全部異なる。
- (3) 色も番号も全部異なる。

3 (1)  $a$  3個、 $b$  2個、 $c$  1個を1列に並べるとき、両端が子音となる確率を求めよ。

- (2) 男子4人、女子2人が手をつないで輪を作ると、女子2人が隣り合う確率を求めよ。

4 袋の中に赤球1個、黄球2個、绿球3個、青球4個の合わせて10個の球が入っている。

この袋から一度に3個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 3個の球の色がすべて同じである確率
- (2) 3個の球の色がすべて異なる確率

7 袋Aには赤玉3個と青玉2個、袋Bには赤玉7個と青玉3個が入っている。

- (1) 袋Aから1個、袋Bから2個の玉を取り出すとき、玉の色がすべて同じである確率を求めよ。
- (2) 袋Aに白玉1個を加える。袋Aから玉を1個取り出し、色を確認した後、もとに戻す。これを3回繰り返すとき、すべての色の玉が出る確率を求めよ。

5 (1) 15個の電球の中に2個の不良品が入っている。この中から同時に3個の電球を取り出すとき、少なくとも1個の不良品が含まれる確率を求めよ。

- (2) さいころを3回投げて、出た目の数全部の積を $X$ とする。このとき、 $X > 2$ となる確率を求めよ。

8 (1) さいころを2回投げる。1回目は2以下の目、2回目は4以上の目が出る確率を求めよ。

- (2) A, B, Cの3人がある的に向かって1つのボールを投げるとき、的に当てる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ であるという。この3人がそれぞれ1つのボールを投げると、少なくとも1人が的に当てる確率を求めよ。

6

あるパーティーに、A, B, C, Dの4人が1個ずつプレゼントを持って集まった。これらのプレゼントを一度集めてから無作為に分配することにする。AまたはBが自分のプレゼントを受け取る確率を求めよ。

9 (1) 1個のさいころを5回投げるとき、素数の目がちょうど4回出る確率は $\frac{1}{\square}$ である。また、素数の目が4回以上出る確率は $\frac{1}{\square}$ である。

(2) サッカー部のA君はシュートをするとき、3回のうち2回の割合でゴールを決める。A君が6回連続してシュートをするとき、2回以上ゴールが決まる確率を求めよ。

10 あるゲームでAがBに勝つ確率は常に一定で $\frac{2}{3}$ とする。A, Bがゲームをし、先に3ゲーム勝った方を優勝とする。このとき、3ゲーム目で優勝が決まる確率は $\frac{1}{\square}$ である。4ゲーム目まで行ってAが優勝する確率は $\frac{1}{\square}$ である。ただし、ゲームでは必ず勝負がつくものとする。

11

$x$ 軸上を動く点Aがあり、最初は原点にある。硬貨を投げて表が出たら正の方向に1だけ進み、裏が出たら負の方向に1だけ進む。硬貨を6回投げるものとして、次の確率を求めよ。

- (1) 点Aが原点に戻る確率
- (2) 点Aが2回目に原点に戻り、かつ6回目に原点に戻る確率

13 10本のくじの中に当たりくじが3本ある。一度引いたくじはもとに戻さない。

(1) 初めにaが1本引き、次にbが1本引くとき、次の確率を求めよ。

(ア) a, bともに当たる確率 (イ) bが当たる確率

(2) 初めaが1本ずつ2回引き、次にbが1本引くとき、a, bが1本ずつ当たる確率を求めよ。

12

赤玉5個、白玉4個が入っている袋から、玉を1個取り出し、それをもとに戻さないで、続いてもう1個取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1回目に赤玉が出たとき、2回目も赤玉が出る確率
- (2) 1回目に白玉が出たとき、2回目も赤玉が出る確率

14 袋Aには赤球10個、白球5個、青球3個；袋Bには赤球8個、白球4個、青球6個；袋Cには赤球4個、白球3個、青球5個が入っている。3つの袋から1つの袋を選び、その袋から球を1個取り出したところ白球であった。それが袋Aから取り出された球である確率を求めよ。

1 次の確率を求めよ。

- (1) 2個のさいころを投げるとき、目の和が素数である確率
- (2) 3枚の硬貨を投げて、表1枚、裏2枚が出る確率

解答 (1)  $\frac{5}{12}$  (2)  $\frac{3}{8}$

解説

(1) 起こりうるすべての場合は  $6 \times 6 = 36$  (通り)

目の和が素数2, 3, 5, 7, 11となる場合は、それぞれ1, 2, 4, 6, 2通りあり、合計して  $1+2+4+6+2=15$  (通り)

よって、求める確率は  $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

(2) 起こりうるすべての場合は  $2^3 = 8$  (通り)

このうち、表1枚、裏2枚が出る場合は

(表、裏、裏), (裏、表、裏), (裏、裏、表)

の3通りある。

よって、求める確率は  $\frac{3}{8}$

2 赤、青、黄の札が4枚ずつあり、どの色の札にも1から4までの番号が1つずつ書かれている。この12枚の札から無作為に3枚取り出したとき、次のことが起こる確率を求めよ。

- (1) 全部同じ色になる。 (2) 番号が全部異なる。 (3) 色も番号も全部異なる。

解答 (1)  $\frac{3}{55}$  (2)  $\frac{27}{55}$  (3)  $\frac{6}{55}$

解説

12枚の札から3枚の札を取り出す方法は  ${}_{12}C_3$  通り

- (1) 赤、青、黄のどの色が同じになるかが  ${}^3C_1$  通り  
その色について、どの番号を取り出すかが  ${}^4C_3$  通り

ゆえに、求める確率は  $\frac{{}^3C_1 \times {}^4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{3 \times 4}{220} = \frac{3}{55}$

- (2) どの3つの番号を取り出すかが  ${}^4C_3$  通り

そのおのおのに対して、色の選び方は  $3^3$  通りずつあるから、番号が全部異なる場合は  ${}^4C_3 \times 3^3$  通り

ゆえに、求める確率は  $\frac{{}^4C_3 \times 3^3}{{}_{12}C_3} = \frac{4 \times 27}{220} = \frac{27}{55}$

- (3) どの3つの番号を取り出すかが  ${}^4C_3$  通りあり、取り出した3つの番号の色の選び方が  ${}^3P_3$  通りあるから、色も番号も全部異なる場合は  ${}^4C_3 \times {}^3P_3$  通り

ゆえに、求める確率は  $\frac{{}^4C_3 \times {}^3P_3}{{}_{12}C_3} = \frac{4 \times 6}{220} = \frac{6}{55}$

3 (1)  $a$  3個、 $b$  2個、 $c$  1個を1列に並べると、両端が子音となる確率を求めよ。

- (2) 男子4人、女子2人が手をつけないで輪を作ると、女子2人が隣り合う確率を求めよ。

解答 (1)  $\frac{1}{5}$  (2)  $\frac{2}{5}$

解説

- (1) 3個の  $a$  を  $a_1, a_2, a_3$ 、2個の  $b$  を  $b_1, b_2$  とする。

起こりうる場合は、6個の文字を1列に並べる順列で  ${}_6P_6 = 6!$  (通り)

このうち、両端が子音となる場合は  ${}_3P_2$  通り

そのおのおのについて、間の4つの文字の並べ方は  ${}_4P_4 = 4!$  (通り)

よって、求める確率は  $\frac{{}_3P_2 \times 4!}{6!} = \frac{3 \cdot 2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$

(2) 起こりうる場合は、6人の円順列であるから  $(6-1)! = 5!$  (通り)

このうち、女子2人が隣り合う場合は  $(5-1)! \times 2 = 4! \times 2$  (通り)

よって、求める確率は  $\frac{4! \times 2}{5!} = \frac{2}{5}$

4 袋の中に赤球1個、黄球2個、緑球3個、青球4個の合わせて10個の球が入っている。

この袋から一度に3個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 3個の球の色がすべて同じである確率

- (2) 3個の球の色がすべて異なる確率

解答 (1)  $\frac{1}{24}$  (2)  $\frac{5}{12}$

解説

10個の球から3個を取り出す場合の総数は  ${}^{10}C_3$  通り

- (1) 3個の球の色がすべて同じであるのは

$A : 3$  個とも緑、  $B : 3$  個とも青

の場合であり、事象  $A, B$  は互いに排反である。

よって、求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}^3C_3}{{}^{10}C_3} + \frac{{}^4C_3}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} = \frac{1}{24}$$

(2) 3個の球の色がすべて異なるのは、3個の球の色が次の[1]～[4]のようになる場合である。

[1] 赤・黄・緑 [2] 赤・黄・青 [3] 赤・緑・青 [4] 黄・緑・青

事象[1]～[4]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{{}^{10}C_3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{{}^{10}C_3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{{}^{10}C_3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{{}^{10}C_3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

5 (1) 15個の電球の中に2個の不良品が入っている。この中から同時に3個の電球を取り出すとき、少なくとも1個の不良品が含まれる確率を求めよ。

(2) さいころを3回投げて、出た目の数全部の積を  $X$  とする。このとき、 $X > 2$  となる確率を求めよ。

解答 (1)  $\frac{13}{35}$  (2)  $\frac{53}{54}$

解説

(1)  $A$  : 「少なくとも1個の不良品が含まれる」とすると、余事象  $\bar{A}$  は「3個とも不良品でない」であるから、その確率は  $P(\bar{A}) = \frac{{}^{13}C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{22}{35}$

よって、求める確率は  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{13}{35}$

別解 不良品が1個または2個の場合があり、これらは互いに排反であるから、求める確率は  $\frac{{}^2C_1 \cdot {}^{13}C_2}{{}^{15}C_3} + \frac{{}^2C_2 \cdot {}^{13}C_1}{{}^{15}C_3} = \frac{13}{35}$

(2)  $A$  : 「 $X > 2$ 」とすると、余事象  $\bar{A}$  は「 $X \leq 2$ 」である。

[1]  $X=1$  となる目の出方は、(1, 1, 1)の 1通り

[2]  $X=2$  となる目の出方は、(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)の 3通り

目の出方は全体で  $6^3$  通りであるから、[1], [2] より

$P(\bar{A}) = \frac{1+3}{6^3} = \frac{1}{54}$

よって  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$

6 あるパーティーに、A, B, C, Dの4人が1個ずつプレゼントを持って集まつた。これらのプレゼントを一度集めてから無作為に分配することにする。AまたはBが自分のプレゼントを受け取る確率を求めよ。

解答  $\frac{5}{12}$

解説

プレゼントの受け取り方の総数は 4! 通り

A, Bが自分のプレゼントを受け取る事象をそれぞれ  $A, B$  とすると、求める確率は  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3!}{4!} + \frac{3!}{4!} - \frac{2!}{4!} = \frac{6}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24} = \frac{5}{12}$$

7 袋Aには赤玉3個と青玉2個、袋Bには赤玉7個と青玉3個が入っている。

(1) 袋Aから1個、袋Bから2個の玉を取り出すとき、玉の色がすべて同じである確率を求めよ。

(2) 袋Aに白玉1個を加える。袋Aから玉を1個取り出し、色を確認した後、もとに戻す。これを3回繰り返すとき、すべての色の玉が出る確率を求めよ。

解答 (1)  $\frac{23}{75}$  (2)  $\frac{1}{6}$

解説

(1) 袋Aから玉を取り出す試行と、袋Bから玉を取り出す試行は独立である。

[1] 袋Aから赤玉1個、袋Bから赤玉2個を取り出す場合、その確率は  $\frac{3}{5} \times \frac{{}^7C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{3}{5} \times \frac{21}{45} = \frac{21}{75}$

[2] 袋Aから青玉1個、袋Bから青玉2個を取り出す場合、その確率は  $\frac{2}{5} \times \frac{{}^3C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{45} = \frac{2}{75}$

[1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は  $\frac{21}{75} + \frac{2}{75} = \frac{23}{75}$

(2) 3回の試行は独立である。

1個玉を取り出すとき、赤玉、青玉、白玉が出る確率は、それぞれ  $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

3回玉を取り出すとき、赤玉、青玉、白玉が1個ずつ出る出方は  ${}^3P_3$  通りあり、各場合は互いに排反である。

よって、求める確率は  $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \times {}^3P_3 = \frac{1}{6}$

8 (1) さいころを2回投げる。1回目は2以下の目、2回目は4以上の目が出る確率を求めよ。

(2) A, B, Cの3人がある的に向かって1つのボールを投げるとき、的に当てる確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  であるという。この3人がそれぞれ1つのボールを投げると、少なくとも1人が的に当てる確率を求めよ。

解答 (1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{5}{6}$

解説

(1) さいころを投げる2回の試行は独立である。

1回目に2以下の目が出る確率は  $\frac{2}{6}$

2回目に4以上の目が出る確率は  $\frac{3}{6}$

よって、求める確率は  $\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

(2) A, B, Cの3人が的に向かってボールを投げる試行は独立である。

また、少なくとも1人が的に当てるという事象は、3人とも的に当たらないという事象の余事象である。

ゆえに、3人とも的にボールが当たらない確率は

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

よって、少なくとも1人が的に当てる確率は  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

[9] (1) 1個のさいころを5回投げるとき、素数の目がちょうど4回出る確率は  $\square$  である。

ある。素数の目が4回以上出る確率は  $\square$  である。

(2) サッカーチームのA君はシュートをするとき、3回のうち2回の割合でゴールを決める。A君が6回連続してシュートをするとき、2回以上ゴールが決まる確率を求めよ。

解答 (1) (ア)  $\frac{5}{32}$  (イ)  $\frac{3}{16}$  (2)  $\frac{716}{729}$

解説

(1) さいころを1回投げるとき、それが素数の目である確率は  $\frac{3}{6}$ 、素数以外の目である確率は  $\frac{3}{6}$  である。

$$(ア) {}_5C_4 \left(\frac{3}{6}\right)^4 \left(\frac{3}{6}\right)^1 = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

(イ) 素数の目が4回以上出るのは、素数の目が4回または5回出る場合であるから、その確率は  $\frac{5}{32} + \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}$

(2) 3回のうち2回の割合でゴールを決めるから、1回で決める確率は  $\frac{2}{3}$

6回シュートをするとき、2回以上ゴールが決まるという事象は、0回または1回だけゴールが決まるという事象の余事象である。

したがって、求める確率は

$$1 - \left\{ {}_6C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 + {}_6C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right\} = 1 - \left( \frac{1}{3^6} + \frac{12}{3^6} \right) = 1 - \frac{13}{3^6} = \frac{3^6 - 13}{3^6} = \frac{716}{729}$$

[10] あるゲームでAがBに勝つ確率は常に一定で  $\frac{2}{3}$  とする。A, Bがゲームをし、先に3

ゲーム勝った方を優勝とする。このとき、3ゲーム目で優勝が決まる確率は  $\square$  である。

ある。4ゲーム目まで行ってAが優勝する確率は  $\square$  である。ただし、ゲームでは必ず勝負がつくものとする。

解答 (ア)  $\frac{1}{3}$  (イ)  $\frac{8}{27}$

解説

1回のゲームでAが負ける(Bが勝つ)確率は  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(ア) 3ゲーム目で優勝が決まるのは、Aが3ゲームとも勝つか、または、Bが3ゲーム

とも勝つ場合で、これらは排反事象であるから、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$$

(イ) 4ゲーム目まで行って、Aが優勝するのは、3ゲームまでにAが2勝1敗で、4ゲーム目にAが勝つ場合であるから、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{2^3}{3^4} = \frac{8}{27}$$

[11] x軸上を動く点Aがあり、最初は原点にある。硬貨を投げて表が出たら正の方向に1だけ進み、裏が出たら負の方向に1だけ進む。硬貨を6回投げるものとして、次の確率を求めよ。

(1) 点Aが原点に戻る確率

(2) 点Aが2回目に原点に戻り、かつ6回目に原点に戻る確率

解答 (1)  $\frac{5}{16}$  (2)  $\frac{3}{16}$

解説

(1) 硬貨を6回投げたとき、表がr回出たとすると、点Aのx座標は

$$1 \cdot r + (-1) \cdot (6-r) = 2r - 6 \quad (r=0, 1, \dots, 6)$$

x座標が0のとき、 $2r - 6 = 0$  とすると  $r=3$

よって、求める確率は、6回のうち表が3回、裏が3回出る確率であるから

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$$

(2) 最初の2回で表が1回、裏が1回出て、残りの4回で表が2回、裏が2回出る場合であるから、その確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2 \cdot 6}{2^6} = \frac{3}{16}$$

[12] 赤玉5個、白玉4個が入っている袋から、玉を1個取り出し、それをもとに戻さないで、続いてもう1個取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) 1回目に赤玉が出たとき、2回目も赤玉が出る確率

(2) 1回目に白玉が出たとき、2回目に赤玉が出る確率

解答 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{5}{8}$

解説

1回目に赤玉を取り出すという事象をA、2回目に赤玉を取り出すという事象をBとする。

(1) 求める確率は  $P_A(B)$

1回目に赤玉が出たとき、2回目は赤玉4個、白玉4個の計8個の中から玉を取り出すことになるから  $P_A(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(2) 求める確率は  $P_{\bar{A}}(B)$

1回目に白玉が出たとき、2回目は赤玉5個、白玉3個の計8個の中から玉を取り出すことになるから  $P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{8}$

別解 [条件付き確率の定義式に当てはめて考える]

(1)  $P(A) = \frac{5}{9}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{5P_2}{9P_2} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{5}{18}$

よって  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{18} \div \frac{5}{9} = \frac{5}{18} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{2}$

(2)  $P(\bar{A}) = \frac{4}{9}$ ,  $P(\bar{A} \cap B) = \frac{4P_1 \times 5P_1}{9P_2} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{5}{18}$

よって  $P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{5}{18} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{18} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{8}$

[13] 10本のくじの中に当たりくじが3本ある。一度引いたくじはもとに戻さない。

(1) 初めにaが1本引き、次にbが1本引くとき、次の確率を求めよ。

(ア) a, bともに当たる確率 (イ) bが当たる確率

(2) 初めaが1本ずつ2回引き、次にbが1本引くとき、a, bが1本ずつ当たる確率を求めよ。

解答 (1) (ア)  $\frac{1}{15}$  (イ)  $\frac{3}{10}$  (2)  $\frac{7}{60}$

解説

当たることを○、はずれることを×で表す。

(1) aが当たるという事象をA, bが当たるという事象をBとする。

(ア)  $P(A) = \frac{3}{10}$ ,  $P_A(B) = \frac{2}{9}$  であるから、求める確率は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

(イ) bが当たるのは、{a○, b○}, {a×, b○}の場合があり、これらの事象は互いに排反である。

よって、求める確率は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) \\ = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$

(2) a, bが1本ずつ当たるのは、{a○, a×, b○}, {a×, a○, b○}の場合があり、これらの事象は互いに排反である。

よって、求める確率は  $\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{60}$

[14] 袋Aには赤球10個、白球5個、青球3個；袋Bには赤球8個、白球4個、青球6個；袋Cには赤球4個、白球3個、青球5個が入っている。3つの袋から1つの袋を選び、その袋から球を1個取り出したところ白球であった。それが袋Aから取り出された球である確率を求めよ。

解答  $\frac{10}{27}$

解説

袋A, B, Cを選ぶという事象をそれぞれA, B, Cとし、白球を取り出すという事象をWとする。

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W) \\ = P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) + P(C)P_C(W)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{18} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{18} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{54} + \frac{2}{27} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

よって、求める確率は  $P_W(A) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{P(A)P_A(W)}{P(W)} = \frac{5}{54} \div \frac{1}{4} = \frac{10}{27}$