数学演習（場合の数）Ｈ２５．１１．８　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．6個の数字0，1，2，3，4，5の中から，異なる数字を使って整数を作る。
(1)　4桁の奇数はいくつできるか。
(2)　300より大きい3桁の整数はいくつできるか。

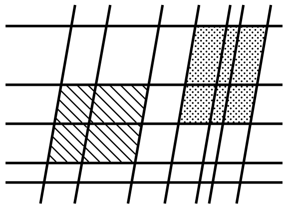
2．400から600の間にある奇数のうち，各位の数字がすべて異なるものはいくつあるか。

3．男子4人，女子5人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。
(1)　両端が女子である
(2)　男子4人が続いて並ぶ

4．男女1人ずつの代表者を含む男女4人ずつ計8人の生徒が，円卓を囲んで集まりをもつことにし，代表者2人は隣り合った特定の2つの席に座ることにした。
(1)　全部で座り方は何通りあるか。
(2)　男女が交互に座るときの座り方は何通りあるか。

5．(1)　10人を2つのグループA，Bに分ける方法は何通りあるか。
(2)　10人を2つのグループに分ける方法は何通りあるか。

6．5本の平行線と7本の平行線が交わっている。
これらの平行線によってできる平行四辺形は全部でいくつあるか。



7．12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　A，B，C の 3 組に 4 人ずつ分ける。　(2)　4 人ずつの 3 組に分ける。

8．YOKOHAMA の 8 文字を 1 列に並べるとき

(1)　Y，K，H，M がこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2)　O と A が必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

9．次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x-2)^5$　$[x^3]$　　(2)　$(a+b+c)^5$　$[a^2bc^2]$

10．白色カードが 5 枚，赤色カードが 2 枚，黒色カードが 1 枚ある。同じ色のカードは区別できないものとして，この 8 枚のカードを左から 1 列に並べるとき，次のような並べ方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　赤色カードが隣り合う　　(2)　両端のカードの色が異なる

11．4 桁の整数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。$a>b>c>d$　を満たす n はそれぞれ何個あるか。

12．$x+y+z=7$ を満たす負でない整数解の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか。

１. 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 の中から，異なる数字を使って整数を作る。

(1)　4 桁の奇数はいくつできるか。

(2)　300 より大きい 3 桁の整数はいくつできるか。

解答　(1)　144 個　　(2)　60 個

解説

(1)　一の位の数字は 1，3，5 の　　3 通り

千の位の数字は，0 と一の位の数字を除いた 4 個の数字を選ぶから

4 通り

百の位，十の位の数字は，一の位，千の位の数字を除いた 4 個から 2 個を取って並べるから　　$_4P_2$ 通り

よって，求める個数は　　$3\times4\times{}_4P_2=12\times4\cdot3=144$ (個)

(2)　百の位の数字は 3，4，5 の　　3 通り

そのおのおのに対して，十の位，一の位の数は，百の位の数字を除いた 5 個から 2 個を取って並べるから　　$_5P_2$ 通り

よって，求める個数は　　$3\times{}_5P_2=3\times5\cdot4=60$ (個)

２. 400 から 600 の間にある奇数のうち，各位の数字がすべて異なるものはいくつあるか。

解答　72 個

解説

[1]　百の位の数字が 4 の場合

一の位は奇数であればよいから，1，3，5，7，9 の　　5 通り

そのおのおのに対して十の位は，4 と一の位の数字を除いた　　8 通り

したがって　　$5\times8=40$ (個)

[2]　百の位の数字が 5 の場合

一の位は，5 を除いた 1，3，7，9 の　　4 通り

そのおのおのに対して十の位は，5 と一の位の数字を除いた　　8 通り

したがって　　$4\times8=32$ (個)

[1]，[2] から　　$40+32=72$ (個)

３. 男子 4 人，女子 5 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　両端が女子である　　　　(2)　男子 4 人が続いて並ぶ

解答　(1)　100800 通り　　(2)　17280 通り

解説

(1)　女子 5 人のうち，2 人が両端に並ぶ並び方は　　$_5P_2$ 通り

そのおのおのに対して，間に並ぶ 7 人の並び方は　　$_7P_7=7!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は

$_5P_2\times7!=20\times5040=100800$ (通り)

(2)　男子 4 人を 1 組と考えると，この 1 組と女子 5 人の並び方は　　$_6P_6=6!$ (通り)

そのおのおのに対して，男子 4 人の並び方が　　$_4P_4=4!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は

$6!\times4!=720\times24=17280$ (通り)

４. 男女 1 人ずつの代表者を含む男女 4 人ずつ計 8 人の生徒が，円卓を囲んで集まりをもつことにし，代表者 2 人は隣り合った特定の 2 つの席に座ることにした。

(1)　全部で座り方は何通りあるか。

(2)　男女が交互に座るときの座り方は何通りあるか。

解答　(1)　1440 通り　　(2)　72 通り

解説

(1)　代表者 2 人を除いた残りの 6 人が座る方法は　　$6!$ 通り

そのおのおのについて，代表者 2 人は 2 通りの座り方がある。

よって，求める座り方の総数は

$6!\times2=720\times2=1440$ (通り)

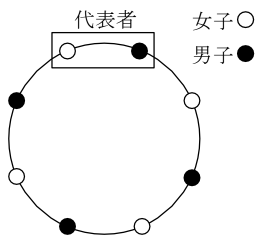
(2)　代表者 2 人を固定して考えると，その他の男子，女子ともに，座ることのできる席は 3 つずつあるから，この 6 人の座り方の総数は

$3!\times3!$ 通り

また，代表者 2 人の場所を入れ替えると，座り方の総数は同様に　$3!\times3!$ 通り

よって，求める座り方の総数は

$3!\times3!\times2=6\times6\times2=72$ (通り)



５. (1)　10 人を 2 つのグループ A，B に分ける方法は何通りあるか。

(2)　10 人を 2 つのグループに分ける方法は何通りあるか。

解答　(1)　1022 通り　　(2)　511 通り

解説

(1)　10 人のそれぞれが A，B 2 通りの部屋の選び方があるから

$2^{10}=1024$ (通り)

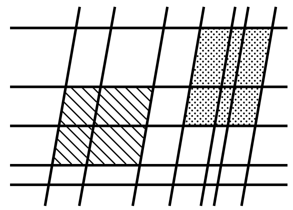
ここから A，B のどちらかが 0 人になる場合を除いて

$1024-2=1022$ (通り)

(2)　(1) で，A，B の区別をなくして　　$1022\div2=511$ (通り)

６. 5 本の平行線と 7 本の平行線が交わっている。

これらの平行線によってできる平行四辺形は全部でいくつあるか。



解答　210 個

解説

5 本の平行線から 2 本を選び，これに交わる 7 本の平行線から 2 本を選ぶと平行四辺形が 1 個できる。

よって，求める個数は　　$_5C_2\times{}_7C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=210$ (個)

7．12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　A，B，C の 3 組に 4 人ずつ分ける。　(2)　4 人ずつの 3 組に分ける。

解答　(1)　34650 通り　　(2)　5775 通り

解説

(1)　12 人から A に分ける 4 人を選ぶ方法は　${}_{12}C_4$ 通り

そのおのおのに対して，残りの 8 人から B に分ける 4 人を選ぶ方法は　${}_8C_4$ 通り

残りの 4 人を C に分ける。

よって，分け方の総数は　${}_{12}C_4\times{}_8C_4=34650$（通り）

(2)　(1) において，A，B，C の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{34650}{3!}=5775$（通り）

8．YOKOHAMA の 8 文字を 1 列に並べるとき

(1)　Y，K，H，M がこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2)　O と A が必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

解答　(1)　420 通り　　(2)　144 通り

解説

(1)　Y，K，H，M を同じ文字 □ と考え，□ 4 個，O 2 個，A 2 個の順列を作り，□ に左から Y，K，H，M を順に入れると，題意の並べ方になる。

よって　$\dfrac{8!}{4!2!2!}=420$（通り）

(2)　偶数番目の 4 か所には O，O，A，A が入るから，その並べ方は

$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

奇数番目の 4 か所には Y，K，H，M が入るから，その並べ方は　4! 通り

よって　$\dfrac{4!}{2!2!}\times4!=144$（通り）

9．次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x-2)^5$　$[x^3]$　　(2)　$(a+b+c)^5$　$[a^2bc^2]$

解答　(1)　1080　　(2)　30

解説

(1)　$(3x-2)^5$を展開すると　${}_5C_2(3x)^3\cdot(-2)^2$が現れる。ゆえに

x^3 の項の係数は　${}_5C_2\cdot3^3\cdot(-2)^2=1080$

(2)　$\{(a+b)+c\}^5$ の展開式において，c^2 を含む項は　${}_5C_2(a+b)^3c^2$

$(a+b)^3$ の展開式において，a^2b の項の係数は　${}_3C_1$

よって，a^2bc^2 の項の係数は　${}_5C_2\times{}_3C_1=30$

別解　(2)　a 2 つ b 1 つ c 2 つの並べ方の総数に等しい。ゆえに係数は　$\dfrac{5!}{2!1!2!}=30$

10．白色カードが 5 枚，赤色カードが 2 枚，黒色カードが 1 枚ある。同じ色のカードは区別できないものとして，この 8 枚のカードを左から 1 列に並べるとき，次のような並べ方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　赤色カードが隣り合う　　(2)　両端のカードの色が異なる

解答　(1)　42 通り　　(2)　102 通り

解説

(1)　2 枚の赤色カードを 1 枚とみなして　$\dfrac{7!}{5!}=42$（通り）

(2)　8 枚のカードの並べ方は，全部で　$\dfrac{8!}{5!2!}=168$（通り）

両端のカードが同じ色になる場合の数を求めると

[1]　両端が白色のとき

白色カード 3 枚，赤色カード 2 枚，黒色カード 1 枚を並べる方法の数で

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$（通り）

[2]　両端が赤色のとき

白色カード 5 枚，黒色カード 1 枚を並べる方法の数で

$\dfrac{6!}{5!}=6$（通り）

[1]，[2] から，求める場合の数は

$168-(60+6)=102$（通り）

11．4 桁の整数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。$a>b>c>d$　を満たす n はそれぞれ何個あるか。

解答　210 個

解説

0，1，2，……，9 の 10 個の数字から異なる 4 個を選んで，大きいものから順に a，b，c，d とすると，条件を満たす n ができる。

よって，求める個数は　${}_{10}C_4=210$（個）

12．$x+y+z=7$ を満たす負でない整数解の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか。

解答　36 個

解説

$x+y+z=7$ を満たす負でない整数解，すなわち整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，7 個の○と 2 個の仕切り｜の順列を考え，仕切りで分けられた 3 つの○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める整数解の組の個数は，○ 7 個と｜2 個を 1 列に並べる順列の総数と同じで

$\dfrac{9!}{7!2!}=36$（個）