数学演習（場合の数）Ｈ２３．１１．２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A\cap\overline{B}$　　(2) $\overline{A}\cup\overline{B}$

2．1から50までの整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1) 3で割り切れる数　　(2) 4で割り切れない数

(3) 3と4の少なくとも一方で割り切れる数

3．800の正の約数の個数と，その約数全体の和を求めよ。

4．男子4人，女子5人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 両端が女子である　　(2) 男子4人が続いて並ぶ

(3) 男子，女子が交互に並ぶ

5．男子6人と女子2人が円形のテーブルに着席するとき

(1) 女子2人が向かい合う着席の仕方は何通りあるか。

(2) 女子2人が隣り合う着席の仕方は何通りあるか。

6．(1) 10人がAまたはBの2部屋に入る方法は何通りあるか。ただし，誰も入らない部屋があってもよいものとする。

(2) 10人を2つのグループA，Bに分ける方法は何通りあるか。

(3) 10人を2つのグループに分ける方法は何通りあるか。

7．男子 8 人，女子 4 人の計 12 人から 5 人を選ぶとき

(1)　全部で何通りの方法があるか。

(2)　男子 3 人，女子 2 人を選ぶ方法は何通りあるか。

(3)　特定の A，B が必ず選ばれる方法は何通りあるか。

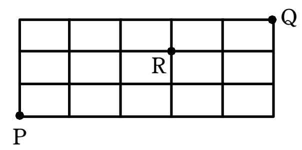
8．柿，りんご，みかんの 3 種類の果物の中から 10 個の果物を買うとき，何通りの買い方があるか。ただし，買わない果物があってもよい。

9．3 個の p，4 個の q，2 個の r の 9 文字を 1 列に並べる並べ方は何通りあるか。

10. 異なる 9 個のケーキを次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　2 個，3 個，4 個の 3 組　　(2)　3 個ずつ 3 組　　(3)　4 個，4 個，1 個の 3 組

11. 右のような道路で，点 P から点 Q まで最短距離で行く経路のうち，次の経路は何通りあるか。



(1)　すべての経路

(2)　R を通らない経路

12. 次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(a-4)^5$　　$[a^3]$　　(2)　$(x+y+z)^9$　　$[x^3y^4z^2]$

数学演習（場合の数）H２３．１１．２　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1)　$A\cap\overline{B}$　　　(2)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

解答　(1)　$\{2,\ 4\}$　　(2)　$\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

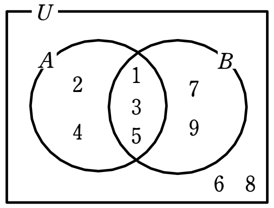
解説

(1)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　，$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　より

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 4\}$

(2)　$\overline{A}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$　，　$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　より

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$



2．1から50までの整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1)　3で割り切れる数　　　(2)　4で割り切れない数

(3)　3と4の少なくとも一方で割り切れる数

解答　(1)　16個　　(2)　38個　　(3)　24個

解説

1から50までの整数全体の集合を全体集合 U とし，U の部分集合のうち，3で割り切れる数全体の集合を A，4で割り切れる数全体の集合を B とする。

(1)　$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot16\}$ であるから　　$n(A)=16$（個）

(2)　$B=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot12\}$ であるから　　$n(B)=12$

よって　　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=50-12=38$（個）

(3)　3と4の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ で表される。

また，$A\cap B$ は3かつ4で割り切れる数，すなわち12で割り切れる数全体の集合を表し　　$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3,\ 12\cdot4\}$

よって　　$n(A\cap B)=4$

ゆえに　　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+12-4=24$（個）

3．800の正の約数の個数と，その約数全体の和を求めよ。

解答　18個，1953

解説

$800=2^5\cdot5^2$ であるから，正の約数の個数は

$(5+1)(2+1)=18$（個）

$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5+5^2)$ を展開すると，各項に800のすべての約数が現れるから，その約数全体の和は

$(1+2+4+8+16+32)(1+5+25)=63\times31=1953$

4．男子4人，女子5人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　両端が女子である　　　(2)　男子4人が続いて並ぶ

(3)　男子，女子が交互に並ぶ

解答　(1)　100800通り　　(2)　17280通り　　(3)　2880通り

解説

(1)　女子5人のうち，2人が両端に並ぶ並び方は　　${}_5\mathrm{P}_2$ 通り

そのおのおのに対して，間に並ぶ7人の並び方は　　${}_7\mathrm{P}_7=7!$（通り）

よって，求める並び方の総数は

${}_5\mathrm{P}_2\times7!=20\times5040=100800$（通り）

(2)　男子4人を1組と考えると，この1組と女子5人の並び方は　　${}_6\mathrm{P}_6=6!$（通り）

そのおのおのに対して，男子4人の並び方が　　${}_4\mathrm{P}_4=4!$（通り）

よって，求める並び方の総数は

$6!\times4!=720\times24=17280$（通り）

(3)　男子，女子が交互に並ぶようにするには，まず女子5人を1列に並べて，その間の4か所に男子4人を並べればよい。

まず，女子5人の並び方は　　${}_5\mathrm{P}_5=5!$（通り）

そのおのおのに対して，女子と女子の間4か所に男子4人を並べる方法は

${}_4\mathrm{P}_4=4!$（通り）

よって，求める並び方の総数は

$5!\times4!=120\times24=2880$（通り）

5．男子6人と女子2人が円形のテーブルに着席するとき

(1)　女子2人が向かい合う着席の仕方は何通りあるか。

(2)　女子2人が隣り合う着席の仕方は何通りあるか。

解答　(1)　720通り　　(2)　1440通り

解説

(1)　1人の女子を固定して考えると，もう1人の女子の席は向かい合う席に決まるから，残りの6つの席に男子6人が並ぶ順列を考えればよい。

よって　　$6!=720$（通り）

(2)　女子2人を1組と考え，この1組と男子6人の円順列は　　$(7-1)!$ 通り

そのおのおのについて，女子2人の着席の仕方は　　2通り

よって　　$(7-1)!\times2=1440$（通り）

6．(1)　10人がAまたはBの2部屋に入る方法は何通りあるか。ただし，誰も入らない部屋があってもよいものとする。

(2)　10人を2つのグループA，Bに分ける方法は何通りあるか。

(3)　10人を2つのグループに分ける方法は何通りあるか。

解答　(1)　1024通り　　(2)　1022通り　　(3)　511通り

解説

(1)　10人のそれぞれがA，B2通りの部屋の選び方があるから

$2^{10}=1024$（通り）

(2)　(1)からA，Bのどちらかが0人になる場合を除いて

$1024-2=1022$（通り）

(3)　(2)で，A，Bの区別をなくして　　$1022\div2=511$（通り）

7．男子 8 人，女子 4 人の計 12 人から 5 人を選ぶとき

(1)　全部で何通りの方法があるか。

(2)　男子 3 人，女子 2 人を選ぶ方法は何通りあるか。

(3)　特定の A，B が必ず選ばれる方法は何通りあるか。

解答　(1)　792 通り　　(2)　336 通り　　(3)　120 通り

解説

(1)　${}_{12}C_5=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$（通り）

(2)　${}_8C_3\times{}_4C_2=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=336$（通り）

(3)　A と B を先に選び，残りの 10 人から 3 人を選べばよい。

よって　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$（通り）

8．柿，りんご，みかんの 3 種類の果物の中から 10 個の果物を買うとき，何通りの買い方があるか。ただし，買わない果物があってもよい。

解答　66 通り

解説

3 種類の果物から，重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66\ （通り）$$

別解　1つの買い方を，○１０個と｜２本で表す。例えば

（柿，りんご，みかん，）＝（３，３，４）　は

○○○｜○○○｜○○○○　　である。

すると，○１０個と｜２本の計１２個のものの並べ方の分だけ買い方がある

並べ方の総数は　$\dfrac{12!}{2!10!}=66$ 通り

9．3 個の p，4 個の q，2 個の r の 9 文字を 1 列に並べる並べ方は何通りあるか。

解答　1260 通り

解説

$\dfrac{9!}{3!4!2!}=1260$（通り）　別解　${}_9C_3\times{}_6C_4\times{}_2C_2=1260$（通り）

10. 異なる 9 個のケーキを次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　2 個，3 個，4 個の 3 組　　(2)　3 個ずつ 3 組　　(3)　4 個，4 個，1 個の 3 組

解答　(1)　1260 通り　　(2)　280 通り　　(3)　315 通り

解説

(1)　9 個から 2 個を選ぶ方法は　${}_9C_2$ 通り

そのおのおのに対して，残りの 7 個から 3 個を選ぶ方法は　${}_7C_3$ 通り

残りの 4 個を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　${}_9C_2\times{}_7C_3=1260$（通り）

(2)　9 個を A，B，C の 3 組に 3 個ずつ分ける方法は　${}_9C_3\times{}_6C_3$ 通り

ここで，A，B，C の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ分け方ができる。

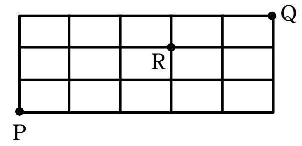
よって，分け方の総数は　$\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=280$（通り）

(3)　A (4 個)，B (4 個)，C (1 個) の 3 組に分ける方法は　${}_9C_4\times{}_5C_4$ 通り

ここで，A，B，C の区別をなくすと，2! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{{}_9C_4\times{}_5C_4}{2!}=315$（通り）

11. 右のような道路で，点 P から点 Q まで最短距離で行く経路のうち，次の経路は何通りあるか。



(1)　すべての経路

(2)　R を通らない経路

解答　(1)　56 通り　　(2)　26 通り

解説

(1)　上に 1 区画，右に 1 区画進むことをそれぞれ ↑，→ で表すと，P から Q まで最短距離で行く経路の総数は，3 個の ↑ と 5 個の → を 1 列に並べる順列の数に等しい。

よって，求める総数は　$\dfrac{8!}{3!5!}=56$（通り）

(2)　P から R まで最短距離で行く経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}=10$（通り）

R から Q まで最短距離で行く経路は　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）

よって，R を通って最短距離で行く経路の総数は　$10\times3=30$（通り）

したがって，R を通らずに最短距離で行く経路の総数は

$56-30=26$（通り）

12. 次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(a-4)^5$　　$[a^3]$　　　(2)　$(x+y+z)^9$　　$[x^3y^4z^2]$

解答　(1)　160　　(2)　1260

解説

(1)　展開式の一般項は　${}_5C_ra^{5-r}(-4)^r$

a^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は　${}_5C_2\cdot(-4)^2=160$

(2)　$\{(x+y)+z\}^9$ の展開式において，z^2 を含む項は　${}_9C_2(x+y)^7z^2$

$(x+y)^7$ の展開式において，x^3y^4 の項の係数は　${}_7C_4$

よって，$x^3y^4z^2$ の項の係数は　${}_9C_2\times{}_7C_4=1260$

別解　$\dfrac{9!}{3!4!2!}=1260$