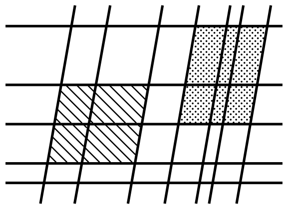
数学演習（場合の数）Ｈ２３．１０．３１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次のような並べ方は何通りあるか。

(1)　2 個の p，4 個の q の 6 文字を 1 列に並べる

(2)　3 個の p，4 個の q，2 個の r の 9 文字を 1 列に並べる

2．5 本の平行線と 7 本の平行線が交わっている。
これらの平行線によってできる平行四辺形は
全部でいくつあるか。



3．平面上の 10 本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，
交点はいくつあるか。また，三角形はいくつできるか。

4．正七角形について，次の問いに答えよ。

(1)　対角線は何本あるか。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形で，正七角形と辺を共有しないものは何個あるか。

5．12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　5 人，4 人，3 人の 3 組に分ける。　　(2)　A，B，C の 3 組に 4 人ずつ分ける。

(3)　4 人ずつの 3 組に分ける。

6．A 組 8 人，B 組 7 人の生徒から 4 人を選ぶとき，B 組の生徒が少なくとも 1 人選ばれる
ような選び方は何通りあるか。

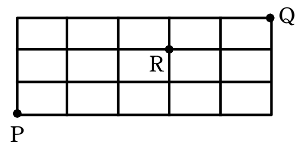
7．異なる 9 個のケーキを次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　2 個，3 個，4 個の 3 組　　(2)　3 個ずつ 3 組　　(3)　4 個，4 個，1 個の 3 組

8．右のような道路で，点 P から点 Q まで最短距離で行
く経路のうち，次の経路は何通りあるか。

(1)　すべての経路　　(2)　R を通る経路

(3)　R を通らない経路



9．6 個の数字 1，1，1，2，2，3 を全部使って 6 桁の整数を作るとき

(1)　総数を求めよ。　　(2)　偶数はいくつできるか。

10. 000 から 999 までの番号のうち，002 や 101 のように，2 種類の数字から成るものはいくつあるか。

11. aabbcd の 6 文字から 4 文字を取り出すとき，その組合せ，および順列の個数を求めよ。

12. YOKOHAMA の 8 文字を 1 列に並べるとき
(1) Y，K，H，M がこの順にある並べ方は何通りあるか。
(2) O と A が必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

13. 次の式の展開式を求めよ。
(1) $(a+b)^6$　(2) $(x-2)^7$　(3) $(2x+5y)^5$　(4) $(3x-2y)^6$

14. 次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。
(1) $(x+3)^7$　$[x^4]$　(2) $(a-4)^5$　$[a^3]$
(3) $(3x+2y)^8$　$[x^3y^5]$　(4) $(4x-y)^{10}$　$[x^4y^6]$

15. 次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。
(1) $(x^2+2)^7$　$[x^{10}]$　(2) $(x^3-x)^5$　$[x^9]$

16. 次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。
(1) $(a+b+c)^5$　$[a^2bc^2]$　(2) $(x+y+z)^9$　$[x^3y^4z^2]$

17. 柿，りんご，みかんの 3 種類の果物の中から 10 個の果物を買うとき，何通りの買い方があるか。ただし，買わない果物があってもよい。

18. 5 個のりんごを 3 人に分配する。1 個ももらわない人があってもよいとすると何通りの分け方があるか。また， 1 人に少なくとも 1 個は与えるものとするとどうか。

数学演習（場合の数）Ｈ２３．１０．３１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次のような並べ方は何通りあるか。

(1)　2 個の p，4 個の q の 6 文字を 1 列に並べる

(2)　3 個の p，4 個の q，2 個の r の 9 文字を 1 列に並べる

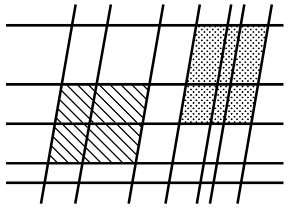
解答　(1)　15 通り　　(2)　1260 通り

解説

(1)　$\dfrac{6!}{2!4!}=15$ (通り)　　(2)　$\dfrac{9!}{3!4!2!}=1260$ (通り)

別解　(1)　${}_6C_2\times{}_4C_4=15$ (通り)　　(2)　${}_9C_3\times{}_6C_4\times{}_2C_2=1260$ (通り)

2．5 本の平行線と 7 本の平行線が交わっている。
これらの平行線によってできる平行四辺形は
全部でいくつあるか。



解答　210 個

解説

5 本の平行線から 2 本を選び，これに交わる 7 本の平行線から 2 本を選ぶと平行四辺形が 1 個できる。

よって，求める個数は　${}_5C_2\times{}_7C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=210$ (個)

3．平面上の 10 本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，交点はいくつあるか。また，三角形はいくつできるか。

解答　交点は 45 個，三角形は 120 個

解説

平行でない 2 本の直線で交点が 1 個できるから，求める交点の個数は

$${}_{10}C_2=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45\ (\text{個})$$

平行でない 3 本の直線で三角形が 1 個できるから，求める三角形の個数は

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120\ (\text{個})$$

4．正七角形について，次の問いに答えよ。

(1)　対角線は何本あるか。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形で，正七角形と辺を共有しないものは何個あるか。

解答　(1)　14 本　　(2)　7 個

解説

(1)　正七角形の 2 個の頂点を結んでできる線分の本数は　${}_7C_2=21$ (本)

対角線の本数は，これから辺の数を引いたものであるから　$21-7=14$ (本)

別解　正七角形の 1 個の頂点に対して，4 本の対角線が引けるから

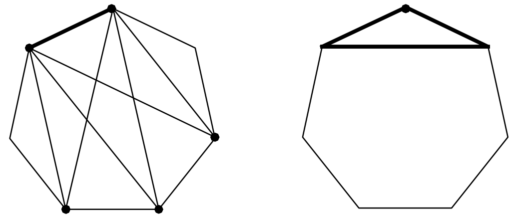
$7\times4\div2=14$ (本)

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形は全部で　${}_7C_3=35$ (個)

このうち，正七角形と 1 辺を共有するものは　7×3 個

正七角形と 2 辺を共有するものは　7 個

よって，正七角形と辺を共有しない三角形は　$35-(7\times3+7)=7$ (個)



5．12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　5 人，4 人，3 人の 3 組に分ける。　(2)　A，B，C の 3 組に 4 人ずつ分ける。

(3)　4 人ずつの 3 組に分ける。

解答　(1)　27720 通り　(2)　34650 通り　(3)　5775 通り

解説

(1)　12 人から 5 人を選ぶ方法は　${}_{12}C_5$ 通り

そのおのおのに対して，残りの 7 人から 4 人を選ぶ方法は　${}_7C_4$ 通り

残り 3 人を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　${}_{12}C_5\times{}_7C_4=27720$ (通り)

(2)　12 人から A に分ける 4 人を選ぶ方法は　${}_{12}C_4$ 通り

そのおのおのに対して，残りの 8 人から B に分ける 4 人を選ぶ方法は　${}_8C_4$ 通り

残りの 4 人を C に分ける。

よって，分け方の総数は　${}_{12}C_4\times{}_8C_4=34650$ (通り)

(3)　(2) において，A，B，C の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{34650}{3!}=5775$ (通り)

6．A 組 8 人，B 組 7 人の生徒から 4 人を選ぶとき，B 組の生徒が少なくとも 1 人選ばれるような選び方は何通りあるか。

解答　1295 通り

解説

15 人の生徒から 4 人を選ぶ選び方は　${}_{15}C_4$ 通り

このうち，B 組の生徒が 1 人も選ばれない選び方は，A 組の 8 人の生徒から 4 人を選ぶ選び方であるから　${}_8C_4$ 通り

よって，求める選び方の総数は　${}_{15}C_4-{}_8C_4=1365-70=1295$ (通り)

7．異なる 9 個のケーキを次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　2 個，3 個，4 個の 3 組　　(2)　3 個ずつ 3 組　　(3)　4 個，4 個，1 個の 3 組

解答　(1)　1260 通り　(2)　280 通り　(3)　315 通り

解説

(1)　9 個から 2 個を選ぶ方法は　${}_9C_2$ 通り

そのおのおのに対して，残りの 7 個から 3 個を選ぶ方法は　${}_7C_3$ 通り

残りの 4 個を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　${}_9C_2\times{}_7C_3=1260$ (通り)

(2)　9 個を A，B，C の 3 組に 3 個ずつ分ける方法は　${}_9C_3\times{}_6C_3$ 通り

ここで，A，B，C の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=280$ (通り)

(3)　A (4 個)，B (4 個)，C (1 個) の 3 組に分ける方法は　${}_9C_4\times{}_5C_4$ 通り

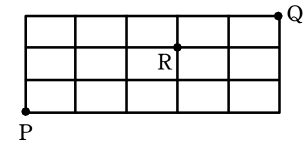
ここで，A，B，C の区別をなくすと，2! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{{}_9C_4\times{}_5C_4}{2!}=315$ (通り)

8．右のような道路で，点 P から点 Q まで最短距離で行く経路のうち，次の経路は何通りあるか。

(1)　すべての経路　　(2)　R を通る経路

(3)　R を通らない経路



解答　(1)　56 通り　(2)　30 通り　(3)　26 通り

解説

(1)　上に 1 区画，右に 1 区画進むことをそれぞれ ↑，→ で表すと，P から Q まで最短距離で行く経路の総数は，3 個の ↑ と 5 個の → を 1 列に並べる順列の数に等しい。

よって，求める総数は　$\dfrac{8!}{3!5!}=56$ (通り)

(2)　P から R まで最短距離で行く経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}=10$ (通り)

R から Q まで最短距離で行く経路は　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$ (通り)

よって，R を通って最短距離で行く経路の総数は　$10\times3=30$ (通り)

(3)　(1)，(2) から，R を通らずに最短距離で行く経路の総数は

$56-30=26$ (通り)

9．6 個の数字 1，1，1，2，2，3 を全部使って 6 桁の整数を作るとき

(1)　総数を求めよ。　　(2)　偶数はいくつできるか。

解答　(1)　60 個　(2)　20 個

解説

(1)　この 6 個の数字を 1 列に並べる順列の総数に等しいから

$\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$ (個)

(2)　偶数であるための条件は，一の位の数字が 2 であることである。

よって，求める個数は，残りの位に 5 個の数字 1，1，1，2，3 を並べる順列の総数に等しいから　$\dfrac{5!}{3!1!1!}=20$ (個)

10．000 から 999 までの番号のうち，002 や 101 のように，2 種類の数字から成るものはいくつあるか。

解答　270 個

解説

0，1，2，……，9 の 10 個の数字から，2 種類の数字を選ぶ組合せは　${}_{10}C_2$ 通り

選んだ 2 種類の数字を a，b とすると

[1]　a : 2 個，b : 1 個から成る番号の個数は　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$ (個)

[2]　a : 1 個，b : 2 個から成る番号の個数は　$\dfrac{3!}{1!2!}=3$ (個)

よって，求める個数は　${}_{10}C_2\times(3+3)=45\times6=270$ (個)

11．aabbcd の 6 文字から 4 文字を取り出すとき，その組合せ，および順列の個数を求めよ。

解答　組合せ 8，順列 102

解説

組合せの個数について

[1]　同じ文字を 2 個ずつ含む組合せは

a，a，b，b の　　1 通り

[2]　同じ文字 2 個を 1 組だけ含む組合せには

a，a，*，*　または　b，b，*，*

の 2 つの形があり，*，* に入る 2 文字の選び方はそれぞれ

${}_3\mathrm{C}_2=3$（通り）

[3]　4 文字とも異なる組合せは

a，b，c，d の　　1 通り

したがって，組合せの個数は　　$1+2\times3+1=8$

また，順列の個数は　　$\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{2!1!1!}\times3\times2+4!=102$

12. YOKOHAMA の 8 文字を 1 列に並べるとき

(1)　Y，K，H，M がこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2)　O と A が必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

解答　(1)　420 通り　　(2)　144 通り

解説

(1)　Y，K，H，M を同じ文字 □ と考え，□ 4 個，O 2 個，A 2 個の順列を作り，□ に左から Y，K，H，M を順に入れると，題意の並べ方になる。

よって　　$\dfrac{8!}{4!2!2!}=420$（通り）

(2)　偶数番目の 4 か所には O，O，A，A が入るから，その並べ方は

$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

奇数番目の 4 か所には Y，K，H，M が入るから，その並べ方は　　$4!$ 通り

よって　　$\dfrac{4!}{2!2!}\times4!=144$（通り）

13. 次の式の展開式を求めよ。

(1)　$(a+b)^6$　　(2)　$(x-2)^7$　　(3)　$(2x+5y)^5$　　(4)　$(3x-2y)^6$

解答　(1)　$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$x^7-14x^6+84x^5-280x^4+560x^3-672x^2+448x-128$

(3)　$32x^5+400x^4y+2000x^3y^2+5000x^2y^3+6250xy^4+3125y^5$

(4)　$729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$

解説

(1)　$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$(x-2)^7=x^7+7x^6(-2)+21x^5(-2)^2+35x^4(-2)^3+35x^3(-2)^4+21x^2(-2)^5$
$+7x(-2)^6+(-2)^7$
$=x^7-14x^6+84x^5-280x^4+560x^3-672x^2+448x-128$

(3)　$(2x+5y)^5=(2x)^5+5(2x)^4(5y)+10(2x)^3(5y)^2+10(2x)^2(5y)^3+5(2x)(5y)^4+(5y)^5$
$=32x^5+400x^4y+2000x^3y^2+5000x^2y^3+6250xy^4+3125y^5$

(4)　$(3x-2y)^6=(3x)^6+6(3x)^5(-2y)+15(3x)^4(-2y)^2+20(3x)^3(-2y)^3+15(3x)^2(-2y)^4$
$+6(3x)(-2y)^5+(-2y)^6$
$=729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$

14. 次の式の展開式において，[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(x+3)^7$　$[x^4]$　　(2)　$(a-4)^5$　$[a^3]$

(3)　$(3x+2y)^8$　$[x^3y^5]$　　(4)　$(4x-y)^{10}$　$[x^4y^6]$

解答　(1)　945　　(2)　160　　(3)　48384　　(4)　53760

解説

(1)　展開式の一般項は　　${}_7\mathrm{C}_rx^{7-r}3^r$

x^4 の項は $r=3$ のときで，その係数は　　${}_7\mathrm{C}_3\cdot3^3=945$

(2)　展開式の一般項は　　${}_5\mathrm{C}_ra^{5-r}(-4)^r$

a^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は　　${}_5\mathrm{C}_2\cdot(-4)^2=160$

(3)　展開式の一般項は　　${}_8\mathrm{C}_r(3x)^{8-r}(2y)^r={}_8\mathrm{C}_r\cdot3^{8-r}\cdot2^rx^{8-r}y^r$

x^3y^5 の項は $r=5$ のときで，その係数は　　${}_8\mathrm{C}_5\cdot3^3\cdot2^5=48384$

(4)　展開式の一般項は　　${}_{10}\mathrm{C}_r(4x)^{10-r}(-y)^r={}_{10}\mathrm{C}_r\cdot4^{10-r}\cdot(-1)^rx^{10-r}y^r$

x^4y^6 の項は $r=6$ のときで，その係数は　　${}_{10}\mathrm{C}_6\cdot4^4\cdot(-1)^6=53760$

15. 次の式の展開式において，[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(x^2+2)^7$　$[x^{10}]$　　(2)　$(x^3-x)^5$　$[x^9]$

解答　(1)　84　　(2)　-10

解説

(1)　展開式の一般項は　　${}_7\mathrm{C}_r(x^2)^{7-r}2^r={}_7\mathrm{C}_r\cdot2^rx^{14-2r}$

$14-2r=10$ とすると　　$r=2$

よって，x^{10} の項の係数は　　${}_7\mathrm{C}_2\cdot2^2=84$

(2)　展開式の一般項は　　${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}(-x)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot(-1)^rx^{15-2r}$

$15-2r=9$ とすると　　$r=3$

よって，x^9 の項の係数は　　${}_5\mathrm{C}_3\cdot(-1)^3=-10$

16. 次の式の展開式において，[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)^5$　$[a^2bc^2]$　　(2)　$(x+y+z)^9$　$[x^3y^4z^2]$

解答　(1)　30　　(2)　1260

解説

(1)　$\{(a+b)+c\}^5$ の展開式において，c^2 を含む項は　　${}_5\mathrm{C}_2(a+b)^3c^2$

$(a+b)^3$ の展開式において，a^2b の項の係数は　　${}_3\mathrm{C}_1$

よって，a^2bc^2 の項の係数は　　${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=30$

(2)　$\{(x+y)+z\}^9$ の展開式において，z^2 を含む項は　　${}_9\mathrm{C}_2(x+y)^7z^2$

$(x+y)^7$ の展開式において，x^3y^4 の項の係数は　　${}_7\mathrm{C}_4$

よって，$x^3y^4z^2$ の項の係数は　　${}_9\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_4=1260$

別解　(1)　$\dfrac{5!}{2!1!2!}=30$　　(2)　$\dfrac{9!}{3!4!2!}=1260$

17. 柿，りんご，みかんの 3 種類の果物の中から 10 個の果物を買うとき，何通りの買い方があるか。ただし，買わない果物があってもよい。

解答　66 通り

解説

3 種類の果物から，重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66\text{（通り）}$$

18. 5 個のりんごを 3 人に分配する。1 個ももらわない人があってもよいとすると何通りの分け方があるか。また，1 人に少なくとも 1 個は与えるものとするとどうか。

解答　順に　21 通り，6 通り

解説

3 人を A，B，C とする。

(前半)　例えば，A に 2 個，B に 2 個，C に 1 個分配することを AABBC と表すことにすると，りんごの分け方の総数は A，B，C から重複を許して 5 個取る組合せの総数に等しい。よって　　${}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$（通り）

別解　5 個のりんごと 2 個の仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた 3 か所のりんごを，左から順に A，B，C に分配すると考える。

したがって，分け方の総数は，5 個の同じものと 2 個の同じものの順列の総数に等しいから　　$\dfrac{7!}{5!2!}=21$（通り）

(後半)　まず，3 人に 1 個ずつりんごを配っておく。

残り 2 個のりんごの分け方は，A，B，C から重複を許して 2 個取る組合せの数に等しい。よって　　${}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$（通り）

別解　まず，3 人に 1 個ずつりんごを配っておく。

次に，残りの 2 個のりんごと 2 個の仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた 3 か所のりんごを，左から順に A，B，C に分配すると考える。

したがって，分け方の総数は，2 個の同じものと 2 個の同じものの順列の総数に等しいから　　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）