数学演習（場合の数）H２１．１．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1　１から５００までの整数のうち，３または５の倍数である整数の個数を求めよ。

2　男子４人，女子４人の８人を１列に並べる。女子４人が続いて並ぶ場合の数を求めよ。また，どの女子も隣り合わない場合の数を求めよ。

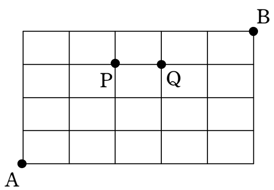
3　(1) １０人をＡ，Ｂ２つの部屋に入れる方法は何通りあるか。ただし，空の部屋があってもよいものとする。
(2) １０人を２つの部屋Ａ，Ｂに分ける方法は何通りあるか。ただし，空の部屋は作らないとする。

4　男子２人と，女子６人が円形のテーブルの周りに並ぶとき，男子２人が隣り合う並び方は何通りあるか。また，８人の中から６人を選んで円形のテーブルの周りに並べる並べ方は何通りあるか。

5　１２人の生徒を４人ずつ３組に分けるとき，次のような分け方は何通りあるか。
(1) 特定の生徒Ａ，Ｂ，Ｃが互いに異なる組に入る分け方。
(2) 特定の生徒Ａ，Ｂ，Ｃが同じ組に入る分け方。

6　HAMAMATSUの９文字を１列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。また，偶数番目に３つのＡとＵが並ぶとき，並べ方は何通りあるか。

7　下の図のような街路で，点Ａから点Ｂまで最短距離を行くとき，次の場合は何通りあるか。
(1) 点Ｐを通る経路
(2) 経路Ｐ−Ｑを通らない経路



8　９個のりんごを４人に分ける方法の総数を求めよ。ただし，１個ももらわない人があってもよいものとする。また，１人１個は必ずもらう場合，分け方の総数を求めよ。

9　次の展開式における，[ ]内に指定した項の係数を求めよ。
(1) $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$　[x^4]　　(2) $(x+y+z)^{10}$　[$x^6y^2z^2$]

1. 1から~~300~~ 500 までの整数のうち，3または5の倍数である整数の個数を求めよ。

1から500までの整数のうち，3の倍数の集合をA，5の倍数の集合をBとする。

$A=\{3\times1, 3\times2, \cdots, 3\times166\}$, $n(A)=166$

$B=\{5\times1, 5\times2, \cdots, 5\times100\}$, $n(B)=100$

$A\cap B=\{15\times1, 15\times2, \cdots, 15\times33\}$, $n(A\cap B)=33$

よって，求める数は

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=166+100-33=233$　$\boxed{233個}$ ⑥

2. 男子4人，女子4人の8人を1列に並べる。女子4人が続いて並ぶ場合の数を求めよ。また，どの女子も隣り合わない場合の数を求めよ。

女子4人を1人とみなして，計5人の並べ方は5!通り。そのおのおのに対して，女子4人の並べ方は4!通りあるから，女子4人が続いて並ぶ場合の数は

$5!\times4!=120\times24=2880$　$\boxed{2880通り}$ ⑥

また，女子が隣り合わない場合，まず，4人の男子を1列に並べ その間と両端の計5カ所から4カ所選んで順に女子4人を並べればよいから

求める数は

$4!\times{}_5P_4=24\times120=2880$　$\boxed{2880通り}$ ⑥

3. (1) 10人をA，B2つの部屋に入れる方法は何通りあるか。ただし，空の部屋があってもよいものとする。

(2) 10人を2つの部屋A，Bに分ける方法は何通りあるか。

(1) 異なる2つのものから重複を許して，10個とってできる順列の数であるから

$2^{10}=1024$　$\boxed{1024通り}$ ⑥

①	②	③	…	⑩
A	A	A	…	A
B	B	B	…	B

$2\times2\times2\times\cdots\times2$

(2) (1)において，AまたはBに10人とも入れてしまう場合を除けばよいから

求める数は

$2^{10}-2=1022$　$\boxed{1022通り}$ ⑥

4. 男子2人と，女子6人が円形のテーブルの周りに並ぶとき，男子2人が隣り合う並び方は何通りあるか。また，8人の中から6人を選んで円形のテーブルの周りに並べる並べ方は何通りあるか。

男子2人を1人とみなし，計7人の円順列は $(7-1)!$ 通り。そのおのおのに対して，男子2人の並び方が2通りあるから，男子2人が隣り合う並び方は

$(7-1)!\times2=720\times2=1440$　$\boxed{1440通り}$ ⑥

また，8人から6人を選んで1列に並べる並べ方は${}_8P_6$通り。これを円形のテーブルに並べると6通りずつ同じ並び方ができるから8人から6人を選んで円形に並べる並べ方は

${}_8P_6\div6=\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{6}=3360$　$\boxed{3360通り}$ ⑥

5. 12人の生徒を4人ずつ3組に分けるとき，次のような分け方は何通りあるか。

(1) 特定の生徒A，B，Cが互いに異なる組に入る分け方。

(2) 特定の生徒A，B，Cが同じ組に入る分け方。

(1) A，B，Cを異なる組に入れ，残り9人を3人ずつ入れればよい。Aの組に入れる入れ方は${}_9C_3$通り。そのおのおのに対してBの組に入れる入れ方は${}_6C_3$通り。残り3人はCの組に入れればよいから，求める数は

${}_9C_3\times{}_6C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=1680$　$\boxed{1680通り}$ ⑥

(2) A，B，Cを同じ組に入れると，この組にもう1人入れる入れ方が9通り，残り8人を4人ずつ2組に分けるとき，この2組は区別がないから，求める数は

$\dfrac{9\times{}_8C_4}{2}=9\times\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times\dfrac{1}{2}=315$　$\boxed{315通り}$ ⑥

6. HAMAMATSUの9文字を1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。また，偶数番目に3つのAとUが並ぶとき，並べ方は何通りあるか。

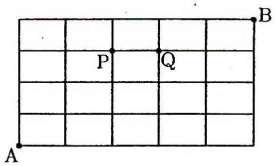
Mが2つ，Aが3つ同じ文字となるので，求める数は

$\dfrac{9!}{2!3!}=\dfrac{9\times8\times7!}{2\times3\times2}=6\times5040=30240$ ⑥　$\boxed{30240通り}$

また，偶数番目に3つのAとUを並べる方法は${}_4C_3$通り。残りの5文字の並べ方は$\dfrac{5!}{2!}$通りあるから，求める数は

${}_4C_3\times\dfrac{5!}{2!}=4\times\dfrac{120}{2}=240$ ⑥　$\boxed{240通り}$

7. 下の図のような街路で，点Aから点Bまで最短距離を行くとき，次の場合は何通りあるか。



(1) Pを通る経路

(2) 経路P−Qを通らない経路

(1) 右へ1区画，上に1区画進むことをそれぞれ→，↑で表すと，AからBまでの最短経路は5つの→と4つの↑を1列に並べる並べ方の数に等しい。よって

Pを通る経路は

$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{4!}{1!3!}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times4=40$　$\boxed{40通り}$ ⑥

(2) 経路P−Qを通る場合の数は

$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{3!}{2!}=10\times3=30$

よって，求める数は

$\dfrac{9!}{5!4!}-30=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}-30=126-30=96$　$\boxed{96通り}$ ⑥

8. 9個のりんごを4人に分ける方法の総数を求めよ。ただし，1個ももらわない人があってもよいものとする。~~また，1人1個は必ずもらう場合，分け方の総数~~を求めよ。

4つのものから重複を許して9個とる組合せの数であるから（9個の○と3つの仕切り「|」の並べ方の数に等しい），求める数は

${}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$　$\boxed{220通り}$ ④

また，1人1個は必ずもらう場合，はじめに1個ずつりんごを分けて，残り6個の分け方を考えればよい。よって求める数は（6個の○と3つの仕切り「|」の並べ方の数に等しい）

${}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$　$\boxed{84通り}$ ④

9. 次の展開式における，[　　]内に指定した項の係数を求めよ。

(1) $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$　$[x^4]$　　(2) $(x+y+z)^{10}$　$[\cancel{x^6y^4}]$ $x^6y^2z^2$

(1) 展開式の一般項は

${}_8C_r(2x^2)^{8-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_8C_r\,2^{8-r}(-1)^r x^{16-2r-r}$

$=(-1)^r2^{8-r}{}_8C_r\cdot x^{16-3r}$

$16-3r=4$ より　$r=4$

よって　x^4の係数は

$(-1)^4 2^4\,{}_8C_4=16\cdot\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=16\times70=\boxed{1120}$ ⑥

(2) 二項定理より

${}_{10}C_2(x+y)^8z^2={}_{10}C_2z^2({}_8C_2x^6y^2)={}_{10}C_2\,{}_8C_2\,x^6y^2z^2$

となればよいから　${}_{10}C_2\times{}_8C_2=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}\cdot\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=\boxed{1260}$ ⑥