統一テスト（場合の数）Ｈ１８．２．２４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1. 自然数 5040 の正の約数の個数を求めよ。

2. 7個の数字 0，1，2，3，4，5，6を使ってできる，次のような自然数の個数を求めよ。

(1) 4桁の自然数　　　(2) 4桁の偶数

3. U＝$\{x \mid 1 \leqq x \leqq 15,\ x$は整数$\}$ を全体集合とする。Uの部分集合A＝$\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 9,\ 12\}$，B＝$\{2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13\}$，C＝$\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 12,\ 13,\ 15\}$ について，次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) $\overline{A \cap B \cap C}$　　　(2) $(A \cup C) \cap \overline{B}$

4. 1から 100 までの整数のうち，次のような整数の個数を求めよ。

(1) 4でも6でも割り切れない整数　　　(2) 4で割り切れるが６で割り切れない整数

5. 男子5人，女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方の総数を求めよ。

(1) 男子５人が続いて並ぶ。　　　(2) どの女子も隣り合わないように並ぶ。

6. A，B，C，D，E，F，G，Hの８人が手をつないで輪を作る。
次のような輪のつくり方は何通りあるか答えよ。

(1) AとBが隣り合う　　　(2) AとBが向かい合う

7. ＡＫＡＳＡＫＡの７文字すべてを１列に並べる方法は何通りあるか。

8. Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉ，Ｊのアルファベット10文字から，5文字を選ぶ。

(1)　ＡとＢと含むようにように選ぶ選び方は何通りあるか。

(2)　Ｊは含まれるが，Ｃは含まれないように選ぶ選び方は何通りあるか。

9. 男子5人，女子4人の中から，4人の委員を選ぶ。次のような選び方の総数を求めよ。

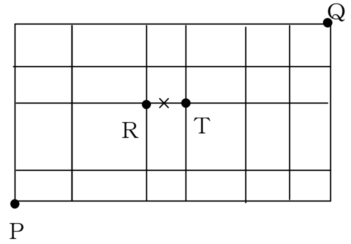
(1) 男子が3人，女子が1人になるように選ぶ。

(2) 少なくとも1人は男子が含まれるように選ぶ。

10. $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

11. 7人の生徒を，3人，2人，2人の３つの組に分ける方法は何通りあるか求めよ。

12. ある街には，右の図のような道がある。ＰからＱまで遠回りしないで行く道順のうち，次のような場合は何通りあるか求めよ。



(1)　すべての場合

(2)　×印の箇所（ＲとＴを結ぶ道）を通らない場合

場合の数　統一テスト　（2月24日）（すべて5点）　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1. 自然数~~300~~ 5040 の正の約数の個数を求めよ。

$5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ より 5040の約数は

$2^a 3^b 5^c 7^d$ $(0 \leqq a \leqq 4,\ 0 \leqq b \leqq 2,\ 0 \leqq c \leqq 1,\ 0 \leqq d \leqq 1)$ の形をしている

よって約数の個数は

(aの選び方)×(bの選び方)×(cの選び方)×(dの選び方) $= 5 \times 3 \times 2 \times 2 =$ 60個

2. 7個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6を使ってできる，次のような自然数の個数を求めよ。

(1) 4桁の自然数

千 百 十 一

0を除く6通り

千の位以外の6個の数字のうち，3個を並べる → $_6P_3$

よって

$6 \times {}_6P_3 = 6 \times 6 \times 5 \times 4 =$ 720個

(2) 4桁の偶数

・一の位が0の時　千 百 十 一

0

1から6までのうち，3個並べる ∴ $_6P_3$

$_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$

$= 120$個

・一の位が 2, 4, 6 の時　4 百 十 一

一の位と0を除く5通り　$_5P_2$　3通り

$5 \times {}_5P_2 \times 3$

$= 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

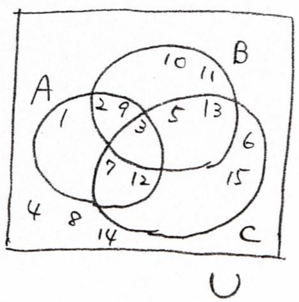
$= 300$個

よって $120 + 300 =$ 420個

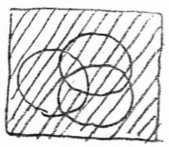
3. U＝{x | $1 \leqq x \leqq 15$，xは整数} を全体集合とする。Uの部分集合A＝{1, 2, 3, 7, 9, 12}，B＝{2, 3, 5, 9, 10, 11, 13}，C＝{3, 5, 6, 7, 12, 13, 15} について，次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) $\overline{A \cap B \cap C}$　　　(2) $(A \cup C) \cap \overline{B}$

ベン図



(1)

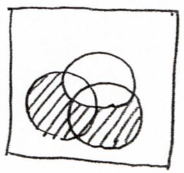


左図の斜線部

$\overline{A \cap B \cap C} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

∴ $n(\overline{A \cap B \cap C}) = 14$

(2)



左図の斜線部

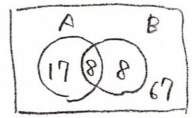
$(A \cup C) \cap \overline{B} = \{1, 6, 7, 12, 15\}$

∴ $n\{(A \cup C) \cap \overline{B}\} = 5$

4. 1から100までの整数のうち，次のような整数の個数を求めよ。

(1) 4でも6でも割り切れない整数　　　(2) 4で割り切れるが6で割り切れない整数

Uを全体集合とし，Uの部分集合として，



$A = \{x \mid x$は4の倍数$\}$，$B = \{x \mid x$は6の倍数$\}$とする。

すると $n(A) = 25$，$n(B) = 16$。

また，$A \cap B = \{x \mid x$は12の倍数$\}$ より

$n(A \cap B) = 8$。

(1) $\overline{A \cup B}$ より $n(\overline{A \cup B}) = 67$

(2) $A \cap \overline{B}$ より $n(A \cap \overline{B}) = 17$

5. 男子5人，女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方の総数を求めよ。

(1) 男子5人が続いて並ぶ。

$\underbrace{\boxed{男男男男男}}_{5!}$ 女，女，女．

4!

男5人をひとまとまりにして考える

∴

$5! \times 4!$

$= 120 \times 24 =$ 2880通り

(2) どの女子も隣り合わないように並ぶ。

5!（男の並べ方）

○男○男○男○男○男○

女3人を○の場所に並べる → $_6P_3$

∴

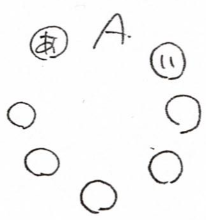
$5! \times {}_6P_3 = 120 \times 120$

$=$ 14400通り

6. A，B，C，D，E，F，G，Hの8人が手をつないで輪を作る。次のような輪のつくり方は何通りあるか答えよ。

(1) AとBが隣り合う

(1) Aを固定する。



Bの場所は あ，い の2通り

また，残りの○6個に C.D.E.F.G.H を並べるので 6!

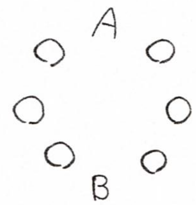
∴

$2 \times 6! = 2 \times 720$

$=$ 1440通り

(2) AとBが向かい合う

(2) A，Bを固定する。



残りの○に C.D.E.F.G.H を並べるので 6!

∴

$6! = 720$通り

7. ＡＫＡＳＡＫＡの７文字すべてを１列に並べる方法は何通りあるか。

Aが4個, Kが2個, Sが1個を1列に並べるので

$\frac{7!}{4!2!1!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = 105$ 通り

8. A, B, C, D, E, F, G, H, I, Jのアルファベット10文字から, 5文字を選ぶ。

(1) ＡとＢと含むようにように選ぶ選び方は何通りあるか。

C, D, E, F, G, H, I, J の8文字から A, Bを除く3文字を選ぶので

$_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$ 通り

(2) Ｊは含まれるが, Ｃは含まれないように選ぶ選び方は何通りあるか。

A, B, D, E, F, G, H, I の8文字から Jを除く4文字を選ぶ

$_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70$ 通り

9. 男子5人, 女子4人の中から, 4人の委員を選ぶ。次のような選び方の総数を求めよ。

(1) 男子が3人, 女子が1人になるように選ぶ。

男 女

$_5C_3 \times {}_4C_1 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{4}{1} = 40$ 通り

(2) 少なくとも1人は男子が含まれるように選ぶ。

(全体) − (4人全員女)

$= {}_9C_4 - {}_4C_4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} - 1 = 126 - 1$

$= 125$ 通り

10. $\left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

定数項は $\left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)$ が5個あるうち, $2x^3$ を2個, $\left(-\frac{1}{3x^2}\right)$ を3個選んだ時である。この選び方は $_5C_2$ 通り

よって $_5C_2\,(2x^3)^2\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^3 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot2^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot x^6\times\frac{1}{x^6}$

$= 10\times4\times\left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{40}{27}$

11. 7人の生徒を, 3人, 2人, 2人の３つの組に分ける方法は何通りあるか求めよ。

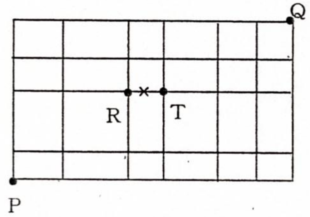
A, B, Cの3部屋に3人, 2人, 2人と分ける方法は

A部屋 B部屋 C部屋

$_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ 通り。ここでB, Cの区別をなくすと, 2!(B, Cの並び)の分だけ全体が重複しているので

$\frac{_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!} = \frac{35\times6\times1}{2\cdot1} = 105$ 通り

12. ある街には, 右の図のような道がある。PからQまで遠回りしないで行く道順のうち, 次のような場合は何通りあるか求めよ。



(1) すべての場合

10回の移動のうち, 右に6回, 上に4回行けばよい。よって

10回のうち いつ6回右に行くかという選び方は

$_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 210$ 通り

(2) ×印の箇所（ＲとＴを結ぶ道）を通らない場合

×印の箇所を通るのは

P → R → T → Q

$_4C_2 \times 1$通り$\times {}_5C_3 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times1\times\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 6\times1\times10 = 60$ 通り

×印の箇所を通らないのは

$210 - 60 = 150$ 通り