統一テスト（場合の数）Ｈ２３．１１．４　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　　(2) $A\cap B$　　(3) $A\cup B$

２. 45 人の生徒に A，B 2 種類の本を読んだかどうか聞いたところ，A を読んだ生徒が 28人，B を読んだ生徒が 12 人，A も B も読まなかった生徒が 7 人いた。次のような生徒は何人か。

(1) A も B も読んだ生徒　　(2) A だけ読んだ生徒

３. 360 の正の約数の個数を求めよ。

４. 1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1) 2 の倍数　　(2) 3 で割り切れない　　(3) 2 の倍数または 3 の倍数

５. 次のものの総数を求めよ。

(1) A，B，C，D，E の 5 文字から 3 文字を選んで 1 列に並べるときの並べ方

(2) 6 人の生徒全員を 1 列に並べる。

６. 男子 4 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 男子 4 人が続いて並ぶ。

(2) 男子は男子，女子は女子で，それぞれ続いて並ぶ。

(3) 両端に男子がくるように並ぶ。

７. (1) 異なる 5 個の玉を机の上に円形に並べる方法は何通りあるか。

(2) 異なる 5 個の玉を使って首飾りをつくるとき，作り方は何通りあるか。

８. 4 人が 1 回じゃんけんをするとき，その出し方は何通りあるか。

９. 赤旗 3 本，白旗 2 本，青旗 2 本を 1 列に並べる方法は何通りあるか。

10. りんご，みかん，バナナ，ぶどうの 4 種類の果物の中から，重複を許して 4 個選ぶ選び方は何通りあるか。ただし，選ばれない果物があってもよいとする。

11. 男子 4 人，女子 6 人の中から 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

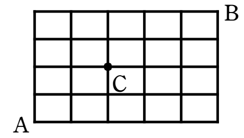
(1)　すべての選び方　　(2)　男子 2 人，女子 2 人を選ぶ。

(3)　特定の 2 人 A と B が含まれる。　　(4)　男子が少なくとも 1 人含まれる。

12. 異なる 9 枚の色紙を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　3 枚ずつ A , B , C の3 人に分ける。　　(2)　3 枚ずつ 3 組に分ける。

13. 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか。



(1)　A から B へ行く。

(2)　C を通って A から B へ行く。

14. 次の式の展開式における，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+2)^5$　　$[x^3]$　　(2)　$(a+b-2c)^6$　　$[a^2b^3c]$

統一テスト（場合の数）Ｈ２３．１１．４　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ について，次の集合を求めよ。

(1)　$\overline{A}$　　(2)　$A\cap B$　　(3)　$A\cup B$

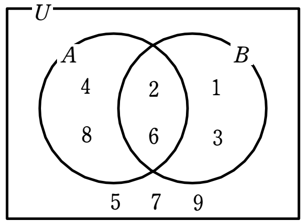
解答　(1)　$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$　(2)　$A\cap B=\{2,6\}$　(3)　$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

解説

(1)　$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(2)　$A\cap B=\{2,6\}$

(3)　$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$



２．45 人の生徒に A，B 2 種類の本を読んだかどうか聞いたところ，A を読んだ生徒が 28人，B を読んだ生徒が 12 人，A も B も読まなかった生徒が 7 人いた。次のような生徒は何人か。

(1)　A も B も読んだ生徒　　(2)　A だけ読んだ生徒

解答　(1)　2 人　(2)　26 人

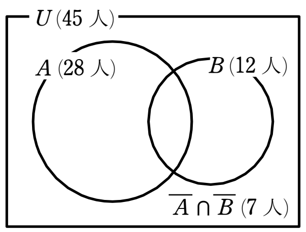
解説

45 人の生徒の集合を U とし，A を読んだ生徒の集合を A，B を読んだ生徒の集合を B とする。

条件から

$n(U)=45$，$n(A)=28$，$n(B)=12$，

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=7$



(1)　A も B も読んだ生徒の集合は $A\cap B$ で表される。

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})$$
$$=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=45-7=38$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ であるから

$$38=28+12-n(A\cap B)$$

よって　$n(A\cap B)=28+12-38=2$ (人)

(2)　A だけ読んだ生徒の集合は $A\cap\overline{B}$ で表される。

よって　$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=28-2=26$ (人)

３．360 の正の約数の個数を求めよ。

解答　24 個

解説

360 を素因数分解すると　$360=2^3\times3^2\times5$

360 の正の約数は，2^3，3^2，5 のそれぞれの正の約数の積である。

2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 個　　3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の 3 個

5 の正の約数は，1，5 の 2 個

よって，360 の正の約数の個数は　$4\times3\times2=24$ (個)

４．1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 で割り切れない　　(3)　2 の倍数または 3 の倍数

解答　(1)　50 個　(2)　67 個　(3)　67個

解説

1 から 100 までの自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする。

このとき　$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，　$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$

(1)　2 の倍数の個数は　$n(A)=50$ (個)

(2)　3 の倍数の個数は　$n(B)=33$ (個)　より　$100-33=67$ (個)

(3)　2 の倍数かつ 3 の倍数は，6 の倍数である。

その集合は　$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$

よって，6の倍数の個数は　$n(A\cap B)=16$ (個)

したがって　求める個数は$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=67$ (個)

５．次のものの総数を求めよ。

(1)　A，B，C，D，E の 5 文字から 3 文字を選んで 1 列に並べるときの並べ方

(2)　6 人の生徒全員を 1 列に並べる。

解答　(1)　60 通り　(2)　720 通り

解説

(1)　${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$ (通り)　(2)　$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

６．男子 4 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　男子 4 人が続いて並ぶ。

(2)　男子は男子，女子は女子で，それぞれ続いて並ぶ。

(3)　両端に男子がくるように並ぶ。

解答　(1)　2880 通り　(2)　1152 通り　(3)　8640 通り

解説

(1)　男子 4 人を 1 組と考え，この 1 組と女子 4 人の並び方は　$5!$ 通り

また，1 組にした男子 4 人の並び方は　$4!$ 通り

よって，求める並び方は　$5!\times4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=2880$ (通り)

(2)　男男男男女女女女 と 女女女女男男男男 の 2 通りの場合がある。それぞれについて

男子 4 人の並び方は $4!$ 通り，　女子 4 人の並び方は $4!$ 通り

よって，求める並び方は　$2\times4!\times4!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=1152$ (通り)

(3)　両端に男子が並ぶ方法は　${}_4\mathrm{P}_2$ 通り

また，両端以外の 6 人の並び方は　$6!$ 通り

よって，求める並び方は　${}_4\mathrm{P}_2\times6!=4\cdot3\times6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8640$ (通り)

７．(1)　異なる 5 個の玉を机の上に円形に並べる方法は何通りあるか。

(2)　異なる 5 個の玉を使って首飾りをつくるとき，作り方は何通りあるか。

解答　(1)　24 通り　(2)　12通り

解説

(1)　$(5-1)!=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (通り)

(2)　(1)の24通りの中に，ひっくり返して同じ並びが 2 通りずつあるので $\dfrac{24}{2}=12$ (通り)

８．4 人が 1 回じゃんけんをするとき，その出し方は何通りあるか。

解答　81 通り

解説

4 人のおのおのについて，じゃんけんの手の出し方は，グー，チョキ，パーの 3 通りがあるから　$3^4=3\times3\times3\times3=81$ (通り)

９．赤旗 3 本，白旗 2 本，青旗 2 本を 1 列に並べる方法は何通りあるか。

解答　210 通り

解説

赤旗 3 本，白旗 2 本，青旗 2 本の計 7 本を 1 列に並べるから

$$\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot2}=210 \text{ (通り)}$$

別解　赤旗 3 本の位置は，7 か所から 3 か所を選ぶから　${}_7C_3$ 通り

そのおのおのに対して，白旗 2 本の位置は 4 か所から 2 か所を選ぶから　${}_4C_2$ 通り

青旗 2 本の位置は残りの 2 か所に決まる。

よって，並べる方法の総数は　${}_7C_3\times{}_4C_2=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=210$ (通り)

10. りんご，みかん，バナナ，ぶどうの 4 種類の果物の中から，重複を許して 4 個選ぶ選び方は何通りあるか。ただし，選ばれない果物があってもよいとする。

解答　35　通り

解説

例えば，りんご2個，みかん0個，バナナ1個，ぶどう1個という選び方を

○○｜｜○｜○　表すと，1 つの選び方に対して，1 つの並びが対応する。

○ 4 個と｜ 3 個の並べ方は　$\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 通りなので，選び方も 35 通りある。

11. 男子 4 人，女子 6 人の中から 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1)　すべての選び方　　(2)　男子 2 人，女子 2 人を選ぶ。

(3)　特定の 2 人 A と B が含まれる。　　(4)　男子が少なくとも 1 人含まれる。

解答　(1)　210 通り　　(2)　90 通り　　(3)　28 通り　　(4)　195 通り

解説

(1)　男子と女子を合わせた 10 人から 4 人を選ぶから

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210 \text{ (通り)}$$

(2)　男子 4 人から 2 人を選ぶ方法は　${}_4C_2$ 通り

女子 6 人から 2 人を選ぶ方法は　${}_6C_2$ 通り

よって，求める選び方の総数は

$${}_4C_2\times{}_6C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=90 \text{ (通り)}$$

(3)　A と B の 2 人を先に選んでおき，残りの 8 人から 2 人を選べばよい。

よって，求める選び方の総数は　${}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ (通り)

(4)　4 人を選ぶ方法の総数は，(1) から，210 通り

このうち，女子だけを 4 人選ぶ方法は　${}_6C_4$ 通り

よって，求める選び方の総数は　$210-{}_6C_4=210-{}_6C_2=210-\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}$

$=210-15=195$ (通り)

12. 異なる 9 枚の色紙を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　3 枚ずつ A , B , C の 3 人に分ける。　　(2)　3 枚ずつ 3 組に分ける。

解答　(1)　1680 通り　　(2)　280 通り

解説

(1)　9 枚から 3 枚を選んで A に分ける方法が ${}_9C_3$ 通り，残りの 6 枚から 3 枚を選んで B に分ける方法が ${}_6C_3$ 通り，最後に残った 3 枚を C に分ける。

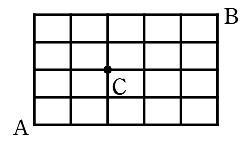
よって，求める分け方の総数は

$${}_9C_3\times{}_6C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=1680 \text{ (通り)}$$

(2)　(1) で A，B，C の区別をなくすと，同じ分け方が 3! 通りずつあるから

$$1680\div3!=280 \text{ (通り)}$$

13. 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか。



(1)　A から B へ行く。

(2)　C を通って A から B へ行く。

解答　(1)　126 通り　　(2)　60 通り

解説

右へ 1 区画進むことを → で，上へ 1 区画進むことを ↑ で表す。

(1)　A から B まで行く最短の道順は，→ 5 個と ↑ 4 個の順列で表される。

よって，求める最短の道順の総数は

$$\frac{9!}{5!4!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126 \text{ (通り)}$$

(2)　A から C まで行く最短の道順は，→ 2 個と ↑ 2 個の順列で表されるから

$$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6 \text{ (通り)}$$

C から B まで行く最短の道順は，→ 3 個と ↑ 2 個の順列で表されるから

$$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10 \text{ (通り)}$$

よって，求める道順の総数は　$6\times10=60$ (通り)

14. 次の式の展開式における，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+2)^5$　$[x^3]$　　(2)　$(a+b-2c)^6$　$[a^2b^3c]$

解答　(1)　1080　　(2)　-120

解説

(1)　$(3x+2)^5$ の展開式の一般項は　${}_5C_r(3x)^{5-r}\cdot2^r={}_5C_r\cdot3^{5-r}\cdot2^rx^{5-r}$

x^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は　${}_5C_2\cdot3^3\cdot2^2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot3^3\cdot2^2=1080$

(2)　$(a+b-2c)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}a^pb^q(-2c)^r=\frac{6!}{p!q!r!}(-2)^r\cdot a^pb^qc^r \quad \text{ただし } p+q+r=6$$

a^2b^3c の項は $p=2,\ q=3,\ r=1$ のときで，その係数は

$$\frac{6!}{2!3!1!}\cdot(-2)^1=-120$$