数学演習（図形と計量）Ｈ２１．８．３１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．△ABC において，AB＝7，BC＝5，CA＝6 のとき，外接円の半径 R，内接円の半径 r を，それぞれ求めよ。

２．AB＝3，AC＝2，∠BAC＝60° の △ABC において，∠A の二等分線と BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

３．円に内接する四角形 ABCD がある。AB＝8，BC＝3，CD＝5，DA＝5 であるとき，この四角形の BD の長さ，$\sin A$ および面積 S を求めよ。

４．1 辺の長さが 1 の正八角形の面積 S を求めよ。

５．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある。辺 OA の中点を L，辺 OB を 2 : 1 に分ける点を M，辺 OC を 1 : 2 に分ける点を N とする。△LMN の面積を求めよ。

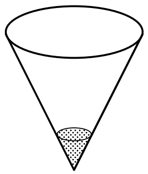
６．半径が 6 の球の，表面積と体積を求めよ。

7．1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD がある。

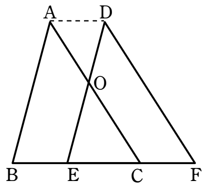
(1)　この正四面体の高さを求めよ。

(2)　この正四面体の体積を求めよ。

8．深さが h である円錐形の容器がある。
あるコップ 1 杯分の水をこの容器に入れたところ，水が入っている部分の深さが $\dfrac{h}{4}$ になった。
この容器に水を満たすには，あとコップ何杯分の水が必要か。



9．右の図において，△ABC と △DEF は合同である。
△OAD と △OCE の面積の比が 4 : 9 であるとき，四角形 OABE の面積は △OAD の面積の何倍か。



10．1 辺 c と 2 つの角 A，B が与えられた △ABC の面積を S とすると，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$$

11．円に内接する四角形 ABCD において，DA＝2AB，∠BAD＝120° であり，対角線 BD，AC の交点を E とするとき，E は線分 BD を 3 : 4 に内分する。

(1)　AB : BC : CD : DA＝1 : $\boxed{ア}$: $\boxed{イ}$: 2 である。

(2)　E は線分 AC を 1 : $\boxed{ウ}$ に内分する。

(3)　BD＝$\sqrt{\boxed{エ}}$ AB，AC＝$\boxed{オ}$AB である。

(4)　円の半径を 1 とすると，AB＝$\boxed{カ}$ であり，四角形 ABCD の面積 S は

S＝$\boxed{キ}$ である。

1. △ABCにおいて，AB＝7，BC＝5，CA＝6のとき，外接円の半径 R，内接円の半径 r を，それぞれ求めよ。

解答　$R=\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$，$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{5}{7}$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin A}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{7}{2\sqrt{6}}=\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

また，△ABCの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

よって　$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=\dfrac{1}{2}r(5+6+7)$

整理して　$6\sqrt{6}=9r$

ゆえに　$r=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

2. AB＝3，AC＝2，∠BAC＝60°の△ABCにおいて，∠Aの二等分線とBCとの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ。

解答　$\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

AD＝x とする。

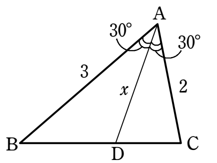
△ABD＋△ADC＝△ABCから

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60^\circ$$

よって　$3x+2x=6\sqrt{3}$

ゆえに　$x=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

すなわち　$AD=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$



3. 円に内接する四角形ABCDがある。AB＝8，BC＝3，CD＝5，DA＝5であるとき，この四角形のBDの長さ，$\sin A$ および面積 S を求めよ。

解答　BD＝7，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$

四角形ABCDは円に内接するから

$C=180^\circ-A$

△ABDに余弦定理を適用して

$BD^2=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cos A$

$=89-80\cos A$　……①

△CDBに余弦定理を適用して

$BD^2=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cos(180^\circ-A)$

$=34+30\cos A$　……②

①，②から　$89-80\cos A=34+30\cos A$

ゆえに　$\cos A=\dfrac{1}{2}$　……③

このとき，①から　$BD^2=89-40=49$

BD＞0であるから　BD＝7

また，③から　$A=60^\circ$

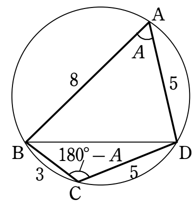
ゆえに　$\sin A=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また　$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$S=△ABD+△CDB$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$



4. 1辺の長さが1の正八角形の面積 S を求めよ。

解答　$2(\sqrt{2}+1)$

右の図のように，正八角形を8個の合同な三角形に分けると

AB＝1，∠AOB＝360°÷8＝45°

OA＝OB＝a とおくと，余弦定理により

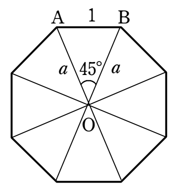
$1^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos 45^\circ$

整理して　$1=(2-\sqrt{2})a^2$

ゆえに　$a^2=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

よって，求める面積は

$$S=8△OAB=8\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 45^\circ=2(\sqrt{2}+1)$$



5. 1辺の長さが1の正四面体OABCがある。辺OAの中点をL，辺OBを2：1に分ける点をM，辺OCを1：2に分ける点をNとする。△LMNの面積を求めよ。

解答　$\dfrac{5\sqrt{3}}{72}$

△OLM，△OMN，△ONLに余弦定理を適用して

$LM^2=OL^2+OM^2-2\cdot OL\cdot OM\cos 60^\circ$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{36}$

$MN^2=OM^2+ON^2-2\cdot OM\cdot ON\cos 60^\circ$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

$NL^2=ON^2+OL^2-2\cdot ON\cdot OL\cos 60^\circ$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{36}$

ゆえに　$LM=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$，$MN=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$NL=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

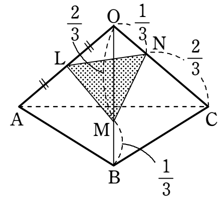
よって，△LMNに余弦定理を適用して

$$\cos\angle MLN=\frac{LM^2+NL^2-MN^2}{2\cdot LM\cdot NL}=\frac{\frac{13}{36}+\frac{7}{36}-\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{13}}{6}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}}=\frac{4}{\sqrt{91}}$$

ゆえに　$\sin\angle MLN=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{\sqrt{91}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{75}{91}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

したがって　$△LMN=\dfrac{1}{2}\cdot LM\cdot NL\sin\angle MLN$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{72}$



6. 半径が6の球の，表面積と体積を求めよ。

解答　順に　144π，288π

表面積を S，体積を V とすると

$S=4\pi\cdot 6^2=144\pi$

$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 6^3=288\pi$

7. 1辺の長さが1である正四面体ABCDがある。

(1)　この正四面体の高さを求めよ。

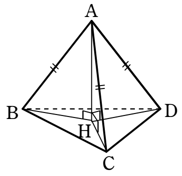
(2)　この正四面体の体積を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

(1)　正四面体の頂点Aから底面△BCDに垂線AHを下ろすと

$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$

よって　$BH = CH = DH$



ゆえに，点 H は △BCD の外接円の中心で，外接円の半径は BH である。

よって，△BCD に正弦定理を適用して

$$BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)　△BCD の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ゆえに，正四面体 ABCD の体積は

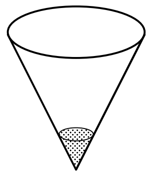
$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

8. 深さが h である円錐形の容器がある。

あるコップ 1 杯分の水をこの容器に入れたところ，

水が入っている部分の深さが $\dfrac{h}{4}$ になった。

この容器に水を満たすには，あとコップ何杯分の水が必要か。



解答　63 杯

容器の円錐を F，コップ 1 杯分の水を入れたときにできる円錐を G とする。

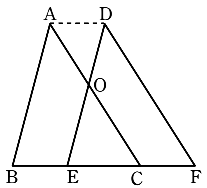
F と G は相似で，その相似比は　4 : 1

よって，その体積の比は　$4^3 : 1^3 = 64 : 1$

ゆえに，容器の体積は，コップ 1 杯分の水の体積の 64 倍である。

したがって，あとコップ 63 杯分の水が必要である。

9. 右の図において，△ABC と △DEF は合同である。△OAD と △OCE の面積の比が 4 : 9 であるとき，四角形 OABE の面積は △OAD の面積の何倍か。



解答　4 倍

△ABC≡△DEF であるから

$\angle ABC = \angle DEF$，$AB = DE$

よって，四角形 ABED は平行四辺形となり

$AD /\!/ BE$，$AD = BE$

$AD /\!/ EC$ であるから　$\triangle OAD \backsim \triangle OCE$

その面積の比が $4 : 9 = 2^2 : 3^2$ であるから

$OA : OC = 2 : 3$

$AB /\!/ OE$ であるから　$\triangle OCE \backsim \triangle ACB$

ゆえに　$OC : AC = OC : (OA + OC) = 3 : 5$

よって，$\triangle OAD \backsim \triangle OCE \backsim \triangle ACB$ であるから

相似比は　$OA : OC : AC = 2 : 3 : 5$

面積の比は　$\triangle OAD : \triangle OCE : \triangle ACB = 2^2 : 3^2 : 5^2 = 4 : 9 : 25$

ゆえに，四角形 OABE の面積は

$$\triangle ACB - \triangle OCE = \frac{25}{4}\triangle OAD - \frac{9}{4}\triangle OAD = 4\triangle OAD$$

したがって　4 倍

10. 1 辺 c と 2 つの角 A，B が与えられた △ABC の面積を S とすると，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin(A+B)}$$

解答　略

$A + B + C = 180^\circ$ であるから　$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$

また，正弦定理により　$\sin B = \dfrac{b}{2R}$，$\sin C = \dfrac{c}{2R}$　(R は △ABC の外接円の半径)

よって

$$\frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin(A+B)} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin C} = \frac{c^2 \sin A \cdot \dfrac{b}{2R}}{2 \cdot \dfrac{c}{2R}} = \frac{1}{2}bc\sin A = S$$

したがって，等式 $S = \dfrac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin(A+B)}$ が成り立つ。

11. 円に内接する四角形 ABCD において，DA＝2AB，∠BAD＝120° であり，対角線 BD，AC の交点を E とするとき，E は線分 BD を 3 : 4 に内分する。

(1)　AB : BC : CD : DA＝1 : ア $\boxed{}$: イ $\boxed{}$: 2 である。

(2)　E は線分 AC を 1 : ウ $\boxed{}$ に内分する。

(3)　$BD = \sqrt{エ\boxed{}}\,AB$，$AC =$ オ $\boxed{}\,AB$ である。

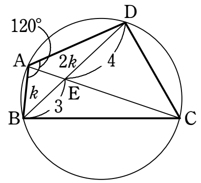
(4)　円の半径を 1 とすると，AB＝カ $\boxed{}$ であり，四角形 ABCD の面積 S は

$S =$ キ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　3　(イ)　2　(ウ)　3　(エ)　7　(オ)　$\dfrac{8}{\sqrt{7}}$　(カ)　$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(キ)　$\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$

(1)～(3)　$AB = k$ とする。



△ABD に余弦定理を適用して

$$BD^2 = k^2 + (2k)^2 - 2 \cdot k \cdot 2k\cos 120^\circ$$
$$= k^2 + 4k^2 + 2k^2 = 7k^2$$

よって　$BD = \sqrt{7}\,k$　すなわち　$BD = \sqrt{^{エ}7}\,AB$

また，余弦定理により

$$\cos\angle ABD = \frac{k^2 + (\sqrt{7}\,k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}\,k} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

更に　$BE = \dfrac{3}{3+4}BD = \dfrac{3}{7} \cdot \sqrt{7}\,k = \dfrac{3}{\sqrt{7}}k$

△ABE に余弦定理を適用して

$$AE^2 = k^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{7}}k\right)^2 - 2k \cdot \frac{3}{\sqrt{7}}k\cos\angle ABD$$
$$= k^2 + \frac{9}{7}k^2 - \frac{12}{7}k^2 = \frac{4}{7}k^2$$

ゆえに　$AE = \dfrac{2}{\sqrt{7}}k$

$\triangle AED \backsim \triangle BEC$ で，相似比は

$$AE : BE = \frac{2}{\sqrt{7}}k : \frac{3}{\sqrt{7}}k = 2 : 3$$

よって　$CE = \dfrac{3}{2}DE$，$BC = \dfrac{3}{2}AD$

ゆえに　$CE = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4}{7}BD = \dfrac{6}{\sqrt{7}}k$，$BC = 3k$

したがって　$AE : CE = \dfrac{2}{\sqrt{7}}k : \dfrac{6}{\sqrt{7}}k = 1 : {}^{ウ}3$

よって　$AC = AE + CE = \dfrac{2}{\sqrt{7}}k + \dfrac{6}{\sqrt{7}}k = \dfrac{8}{\sqrt{7}}k = {}^{オ}\dfrac{8}{\sqrt{7}}AB$

また，$\triangle ABE \backsim \triangle DCE$ で，相似比は

$$AE : DE = AE : \frac{4}{3}BE = \frac{2}{\sqrt{7}}k : \frac{4}{\sqrt{7}}k = 1 : 2$$

よって　$DC = 2AB = 2k$

以上から　$AB : BC : CD : DA = k : 3k : 2k : 2k$

$= 1 : {}^{ア}3 : {}^{イ}2 : 2$

(4)　△ABD に正弦定理を適用して　$\dfrac{BD}{\sin 120^\circ} = 2$

よって　$BD = 2\sin 120^\circ = \sqrt{3}$

一方　$BD = \sqrt{7}\,AB$

ゆえに　$\sqrt{7}\,AB = \sqrt{3}$

よって　$AB = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = {}^{カ}\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

したがって　$S = \triangle ABD + \triangle CBD$

$$= \frac{1}{2}k \cdot 2k\sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 2k\sin(180^\circ - 120^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}k^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}k^2 = 2\sqrt{3}\,k^2 = 2\sqrt{3}\,AB^2$$
$$= 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = {}^{キ}\frac{6\sqrt{3}}{7}$$