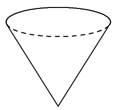
数学演習（三角比）Ｈ２１．１．３１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の図形の面積を求めよ。

⑴ $AB=6$, $AD=4$, $\angle A=60^\circ$ である平行四辺形 $ABCD$

⑵ 半径２の円に内接する正十二角形

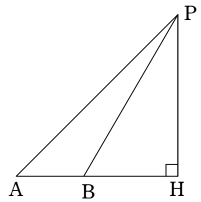
２．右の図のように，底面の半径が r cm，高さが h cm の円錐の形をした容器がある。この容器に，深さの $\dfrac{1}{3}$ のところまで水を入れたとき，あと何 cm^3 の水が入るか。



３．$\triangle ABC$ において，$AB=5$, $AC=3$, $A=120^\circ$ とする。$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

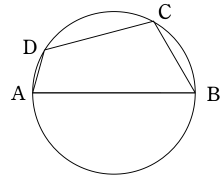
４．地点 A からテレビ塔の頂点 P を見上げた角は 45° であった。次に塔へ向かって水平に 10 m 進んで地点 B から P を見上げた角は 60° であった。図のように P の真下の地点を H とする。目の高さを無視するとき，次のものを求めよ。

⑴ B, H 間の距離　　⑵ 塔の高さ



５．半径５の円において，１つの直径 AB と，周上の２点 C, D をとり，四角形 $ABCD$ を作る。$\angle A=75^\circ$，$\angle B=60^\circ$ のとき，次の線分の長さを求めよ。

⑴ 対角線 AC　　⑵ 辺 CD



６．台形 $ABCD$ において，$AD \parallel BC$, $AB=2$, $BC=4$, $CD=\sqrt{7}$, $DA=1$ であるとき，この台形の面積 S を求めよ。

7．△ ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

8．△ ABC において，$A=60^\circ$，$a:b=2:1$，$c=6$ であるとき，次のものを求めよ。

(1) $\sin B$ の値

(2) b

9．円に内接する四角形 $ABCD$ があり，$AB=5$，$BC=7$，$CD=7$，$DA=3$ である。$\angle A=\theta$ とするとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos\theta$ の値

(2) 四角形 $ABCD$ の面積

(3) この円の半径

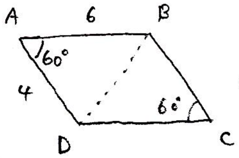
数学演習（2／4宿題）　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

次の図形の面積を求めよ。

(1)　AB＝6，AD＝4，∠A＝60° である平行四辺形ABCD

(2)　半径2の円に内接する正十二角形

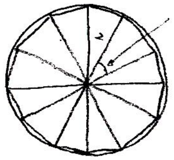
(1)



$S = \frac{1}{2}\times 6\times 4\times \sin 60^\circ \times 2$ ← 2つ分

$= 6\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ //

(2)

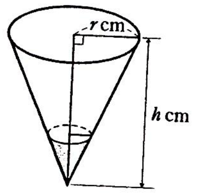


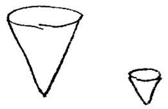
$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

∴ $S = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 30^\circ \times 12$ ← 12コ

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 12 = 12$ //

右の図のように，底面の半径が r cm，高さが h cm の円錐の形をした容器がある。この容器に，深さの $\frac{1}{3}$ のところまで水を入れたとき，あと何 cm^3 の水が入るか。





相似比 $1 : \frac{1}{3} = 3 : 1$

よって

体積比は $3^3 : 1^3 = 27 : 1$

ゆえにこの容器には、あと

全体の $\frac{26}{27}$ だけ入る。

この容器の体積は

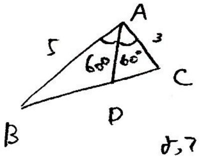
$\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

よって入る水の量は

$\frac{26}{27}\times\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{26}{81}\pi r^2 h$ //

△ABC において，AB＝5，AC＝3，A＝120° とする。∠A の二等分線と辺BCの交点をDとするとき，ADの長さを求めよ。



∴ $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$

よって

$\frac{1}{2}\times 5\times 3\cdot\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot AD\sin 60^\circ + \frac{1}{2}AD\cdot 3\cdot\sin 60^\circ$

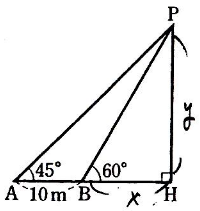
$15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3AD\frac{\sqrt{3}}{2}$

$15 = 5AD + 3AD$

$= 8AD$

∴ $AD = \frac{15}{8}$ //

地点Aからテレビ塔の頂点Pを見上げた角は45°であった。次に塔へ向かって水平に10m進んだ地点BからPを見上げた角は60°であった。図のようにPの真下の地点をHとする。目の高さを無視するとき，次のものを求めよ。



(1)　B，H 間の距離　　　(2)　塔の高さ

BH = x　塔の高さを y とする

△AHPにおいて

$\frac{PH}{AH} = \tan 45^\circ$　　∴ $\frac{y}{10+x} = 1$ より

$y = 10 + x$ …①

△BHPにおいて

$\frac{PH}{BH} = \tan 60^\circ$　　∴ $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$ より $y = \sqrt{3}x$ …②

①②より

$10 + x = \sqrt{3}x$

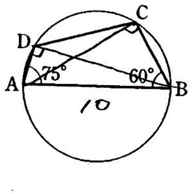
$\sqrt{3}x - x = 10$

$(\sqrt{3}-1)x = 10$

∴ $x = \frac{10}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 5(\sqrt{3}+1)$ //

また $y = \sqrt{3}x = 5\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ //

半径5の円において，1つの直径ABと，周上の2点C，Dをとり，四角形ABCDを作る。∠A＝75°，∠B＝60° のとき，次の線分の長さを求めよ。



(1)　対角線AC　　　(2)　辺CD

(1) AB直径より

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$

△ABCにおいて

$\frac{AC}{AB} = \sin 60^\circ$

∴

$AC = AB\sin 60^\circ$

$= 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

(2) $\angle DAB = 75^\circ$ より $\angle DBA = 15^\circ$

よって、$\angle DBC = 45^\circ$

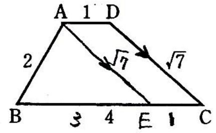
△DCBについて正弦定理より

$2R = \frac{CD}{\sin\angle DBC}$

$2\times 5 = \frac{CD}{\sin 45^\circ}$

∴ $CD = 10\cdot\sin 45^\circ = 10\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

台形ABCDにおいて，AD∥BC，AB＝2，BC＝4，CD＝$\sqrt{7}$，DA＝1 であるとき，この台形の面積 S を求めよ。



BC上に DC∥AE なる点 E をとると、

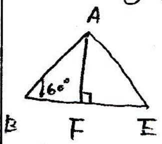
四角形ADCEは平行四辺形より AE=$\sqrt{7}$、EC=1

よって BE=3 となる。

△ABEにおいて余弦定理より

$\cos B = \frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{4+9-7}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{6}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2}$

∴ $0^\circ < B < 180^\circ$ より $B = 60^\circ$.



よって、AからBEに垂線AFを下ろすと、△ABFについて、

$\frac{AF}{AB} = \sin 60^\circ$

∴ $AF = AB\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

となり、AFはこの台形の高さとなる

∴ $S = \frac{1}{2}\cdot AF(AD+BC)$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}(1+4) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ //

△ABCにおいて，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \therefore \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$$

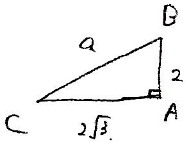
よって $2\sqrt{3}\times\sin 30^\circ = 2\times\sin B$

$2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sin B$ ∴ $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $C=30^\circ$ より $0^\circ<B<150^\circ$ で

$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるBは $B=60^\circ, 120^\circ$

* $B=60^\circ$ の時



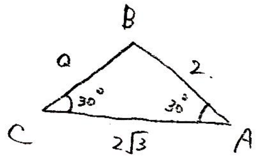
$C=30^\circ$ より $A=90^\circ$

三平方の定理より

$a^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=12+4=16$

$a>0$ より $a=4$

* $B=120^\circ$ の時



$C=30^\circ$ より $A=30^\circ$

すると $\angle A=\angle C$ となるので△ABCは

$a=c$ の2等辺三角形

よって $a=2$

以上より

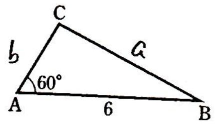
$(A, B, a)=(90^\circ, 60^\circ, 4), (30^\circ, 120^\circ, 2)$

△ABCにおいて，

$A=60^\circ$，$a:b=2:1$，$c=6$

であるとき，次のものを求めよ。

(1) $\sin B$ の値　(2) b



(1) $a:b=2:1$ より $a=2b$ …①

また正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

よって $A=60^\circ$ と①より

$$\frac{2b}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin B}$$

$2b\times\sin B=b\times\sin 60^\circ$

$b\neq 0$ より $2\times\sin B=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) △ABCに正弦定理より

$a^2=b^2+6^2-2\cdot b\cdot 6\cdot\cos 60^\circ$

ここで①より $a=2b$ より

$(2b)^2=b^2+36-6b$

$3b^2+6b-36=0$

$b^2+2b-12=0$

∴ $b=-1\pm\sqrt{1^2-(-12)}$

$=-1\pm\sqrt{13}$

$b>0$ より $b=-1-\sqrt{13}$ は不適

∴ $b=-1+\sqrt{13}$

円に内接する四角形ABCDがあり，

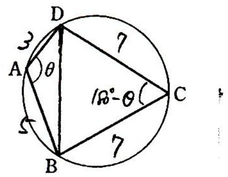
AB＝5，BC＝7，CD＝7，DA＝3

である。$\angle A=\theta$ とするとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos\theta$ の値

(2) 四角形ABCDの面積 S

(3) この円の半径



(1) △ABDで余弦定理より

$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos\theta$

$=9+25-30\cos\theta=34-30\cos\theta$ —①

△BCDで余弦定理より

$BD^2=7^2+7^2-2\cdot7\cdot7\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

$=49+49-98(-\cos\theta)$

$=98+98\cos\theta$ —②

①②より

$34-30\cos\theta=98+98\cos\theta$

解いて $128\cos\theta=-64$ ∴ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ から $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

また $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ より $\sin(180^\circ-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに

$S=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times7\times7\times\sin(180^\circ-\theta)$

$=\frac{1}{2}\cdot15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot49\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(15+49)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times64=16\sqrt{3}$

(3) (1)①より $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より

$BD^2=34-30\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$BD>0$ より $BD=7$

よって $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より 半径をRとすると正弦定理より

$$2R=\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14}{\sqrt{3}} \quad \therefore R=\frac{7}{\sqrt{3}}$$