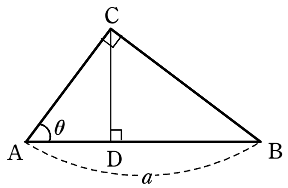
数学演習（三角比）Ｈ２３．９．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．$90° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

２．$\angle C = 90°$ である直角三角形 ABC において，$\angle A = \theta$，$AB = a$ とする。頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CD とするとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。

(1)　BC　(2)　AC　(3)　AD

(4)　CD　(5)　BD



３．△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$ のとき，$\cos B$ の値を求めよ。

４．△ABC において，$a = \sqrt{7}$，$b = 2$，$c = 3$ とする。線分 BC の中点を M とするとき，AM の長さを求めよ。

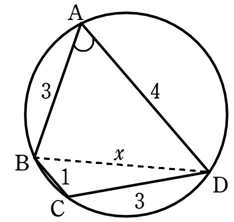
５．円に内接する四角形 ABCD において，

$AB=3$，$BC=1$，$CD=3$，$DA=4$

とするとき，次のものを求めよ。

(1)　A　(2)　対角線 BD の長さ

(3)　四角形 ABCD の面積



６．△ABC において，$AB=5$，$AC=3$，$A = 120°$ とする。$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

7．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

8．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

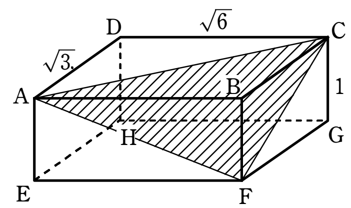
(1)　$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$0 < \tan\theta \leqq 1$

9．3 辺の長さが次のような $\triangle$ABC の面積を求めよ。$a=3$，$b=6$，$c=7$

10．右の図のような $\mathrm{AB}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AE}=1$ である直方体 ABCD－EFGH がある。このとき，次のものを求めよ。

(1)　$\angle$ACF の大きさ

(2)　$\triangle$ACF の面積



11．$a=8$，$b=5$，$C=60°$ の $\triangle$ABC について，次のものを求めよ。

(1)　$\triangle$ABC の面積 S　　(2)　c

(3)　内接円の半径 r　　(4)　外接円の半径 R

12．円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=3$，$\mathrm{DA}=2$ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　対角線 AC の長さ　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

１．$90° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき $\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

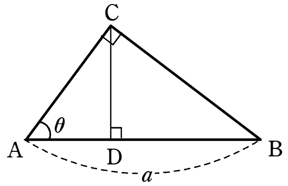
また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\tan\theta = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

２．$\angle C = 90°$ である直角三角形 ABC において，$\angle A = \theta$，$AB = a$ とする。頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CD とするとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。

(1)　BC　　(2)　AC　　(3)　AD

(4)　CD　　(5)　BD



解答　(1)　$BC = a\sin\theta$　　(2)　$AC = a\cos\theta$　　(3)　$AD = a\cos^2\theta$

(4)　$CD = a\sin\theta\cos\theta$　　(5)　$BD = a\sin^2\theta$

(1)　$BC = AB\sin\theta = a\sin\theta$

(2)　$AC = AB\cos\theta = a\cos\theta$

(3)　$AD = AC\cos\theta = (a\cos\theta)\cos\theta = a\cos^2\theta$

(4)　$CD = AC\sin\theta = (a\cos\theta)\sin\theta = a\sin\theta\cos\theta$

(5)　$\angle BCD = \theta$ であるから

$BD = BC\sin\theta = (a\sin\theta)\sin\theta = a\sin^2\theta$

注意　$(\cos\theta)^2$，$(\sin\theta)^2$ は，それぞれ $\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$ と書く。

３．△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$ のとき，$\cos B$ の値を求めよ。

解答　$\cos B = \frac{3}{4}$

正弦定理により　　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$

したがって，$a = 5k$，$b = 4k$，$c = 6k$ $(k > 0)$ とおくことができる。

よって　　$\cos B = \frac{(6k)^2 + (5k)^2 - (4k)^2}{2 \cdot 6k \cdot 5k} = \frac{45k^2}{2 \cdot 6 \cdot 5k^2} = \frac{3}{4}$

４．△ABC において，$a = \sqrt{7}$，$b = 2$，$c = 3$ とする。線分 BC の中点を M とするとき，AM の長さを求めよ。

解答　$AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$

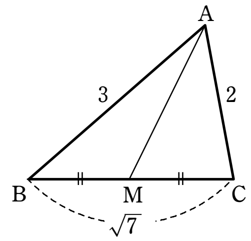
△ABC において，余弦定理により

$$\cos B = \frac{3^2 + (\sqrt{7})^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

△ABM において，余弦定理により

$$AM^2 = 3^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{19}{4}$$

ゆえに　　$AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$



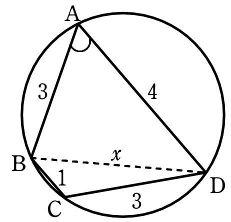
５．円に内接する四角形 ABCD において，

$AB = 3$，$BC = 1$，$CD = 3$，$DA = 4$

とするとき，次のものを求めよ。

(1)　A　　　(2)　対角線 BD の長さ

(3)　四角形 ABCD の面積



解答　(1)　$A = 60°$　　(2)　$BD = \sqrt{13}$　　(3)　$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

(1)　$BD = x$ とする。△ABD に余弦定理を適用して

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

四角形 ABCD は円に内接するから　$C = 180° - A$

△BCD に余弦定理を適用して

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\cos(180° - A)$$
$$= 1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3\cos A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$25 - 24\cos A = 10 + 6\cos A$

よって　　$\cos A = \frac{1}{2}$　　　したがって　　$A = 60°$

(2)　① より　　$x^2 = 9 + 16 - 24\cos 60° = 13$

$x > 0$ であるから　　$x = \sqrt{13}$　　　よって　　$BD = \sqrt{13}$

(3)　$A = 60°$ より　　$C = 120°$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\sin 120°$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

６．△ABC において，$AB = 5$，$AC = 3$，$A = 120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

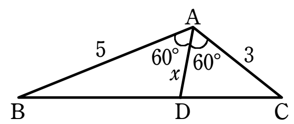
解答　$\frac{15}{8}$

△ABC＝△ABD＋△ACD であるから，

AD＝x とおくと

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\sin 120°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x\sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x\sin 60°$$

整理すると　　$15 = 5x + 3x$



よって　　$x = \frac{15}{8}$　　　答　$\frac{15}{8}$

７．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

解答　$\frac{3}{8}$

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を２乗して

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

よって　　$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$　　　ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

８．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$0 < \tan\theta \leqq 1$

解答　(1)　$45° < \theta < 135°$　　(2)　$150° \leqq \theta \leqq 180°$　　(3)　$0° < \theta \leqq 45°$

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　　$\theta = 45°$，$135°$

図から，不等式の解は　　$45° < \theta < 135°$

(2)　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　　$\theta = 150°$

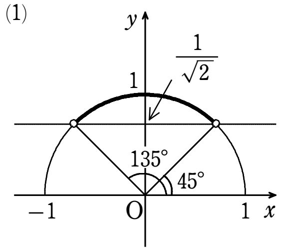
図から，不等式の解は　　$150° \leqq \theta \leqq 180°$

(3)　$\tan\theta = 0$ を満たす θ は　　$\theta = 0°$，$180°$

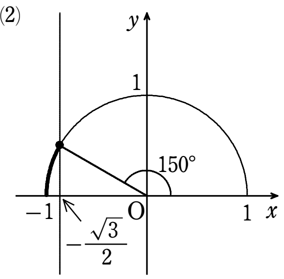
$\tan\theta = 1$ を満たす θ は　　$\theta = 45°$

図から，不等式の解は　　$0° < \theta \leqq 45°$

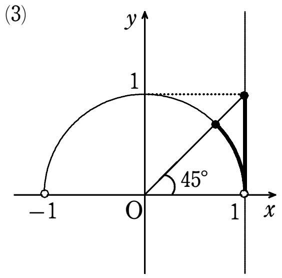
(1)



(2)



(3)



9．3 辺の長さが次のような △ABC の面積を求めよ。$a=3,\ b=6,\ c=7$

解答　$4\sqrt{5}$

△ABC の面積を S とする。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{6^2+7^2-3^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{19}{21}$

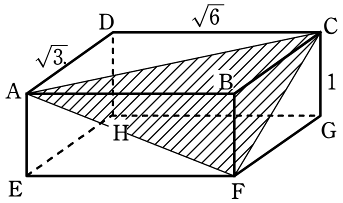
よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{19}{21}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{80}{441}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{21}=4\sqrt{5}$

10. 右の図のような $\mathrm{AB}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AE}=1$ である直方体 ABCD－EFGH がある。このとき，次のものを求めよ。

(1)　∠ACF の大きさ

(2)　△ACF の面積



解答　(1)　60°　(2)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(1)　三平方の定理により

$\mathrm{AC}^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2=9$　よって　$\mathrm{AC}=3$

$\mathrm{CF}^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$　よって　$\mathrm{CF}=2$

$\mathrm{FA}^2=1^2+(\sqrt{6})^2=7$　よって　$\mathrm{FA}=\sqrt{7}$

△ACF に余弦定理を適用して

$\cos\angle\mathrm{ACF}=\dfrac{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{FA}^2}{2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}}=\dfrac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\angle\mathrm{ACF}=60°$

(2)　$\triangle\mathrm{ACF}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}\sin\angle\mathrm{ACF}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

11. $a=8,\ b=5,\ C=60°$ の △ABC について，次のものを求めよ。

(1)　△ABC の面積 S　(2)　c

(3)　内接円の半径 r　(4)　外接円の半径 R

解答　(1)　$10\sqrt{3}$　(2)　7　(3)　$\sqrt{3}$　(4)　$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

(2)　余弦定理により　$c^2=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60°=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}=49$

$c>0$ であるから　$c=7$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ であるから　$10\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}r(8+5+7)$

よって　$r=\dfrac{2\cdot 10\sqrt{3}}{8+5+7}=\sqrt{3}$

(4)　正弦定理により　$\dfrac{7}{\sin 60°}=2R$

よって　$R=\dfrac{7}{2\sin 60°}=\dfrac{7}{2}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

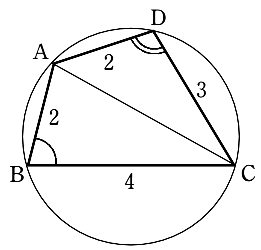
12. 円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=3$，$\mathrm{DA}=2$ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　対角線 AC の長さ　(2)　四角形 ABCD の面積 S

解答　(1)　4　(2)　$\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

(1)　△ABC に余弦定理を適用して

$\mathrm{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos B=20-16\cos B$



また，四角形 ABCD は円に内接するから

$D=180°-B$

よって，△ACD に余弦定理を適用して

$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos(180°-B)$

$=13+12\cos B$

ゆえに　$20-16\cos B=13+12\cos B$

整理して　$28\cos B=7$　すなわち　$\cos B=\dfrac{1}{4}$

よって　$\mathrm{AC}^2=20-16\cos B=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$　$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathrm{AC}=4$

(2)　$\sin B>0$ であるから　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin B+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin(180°-B)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$