数学演習（三角比）Ｈ２１．１．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．$a=\sqrt{6}$, $b=2$, $c=1+\sqrt{3}$ のとき，△ ABC の３つの角の大きさを求めよ。

２．$b=4$, $c=4\sqrt{3}$, $B=30^\circ$ のとき，△ ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

３．△ ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$ のとき，この三角形の最も大きな角の大きさを求めよ。

４．$a=5$, $b=7$, $c=8$ である △ABC の面積 S を求めよ。

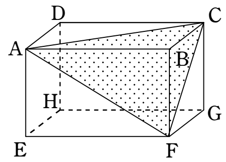
５．△ ABC において，次の関係式が成り立つとき，△ ABC はどのような形の三角形か。

$$\sin A\cos A=\sin B\cos B$$

６. 円に内接する四角形 $ABCD$ において，$AB=1$, $BC=2$, $CD=3$, $DA=4$ であるとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$　　(2) 四角形 $ABCD$ の面積

７. 右の図のような，$AB=3$, $AD=1$, $AE=2$ である直方体 $ABCD-EFGH$ がある。△ AFC の面積 S を求めよ。



８. $\angle A=60°$, $AB=8$, $AC=6$ である△ ABC において，$\angle A$の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき，面積を利用して，線分 AD の長さを求めよ。

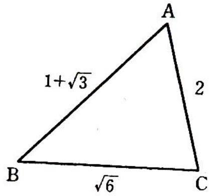
９. １辺の長さが２である正四面体 $OABC$ において，辺 OA の中点を M とする。辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とおくとき，線分 PM の長さを x の式で表せ。

$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$ のとき，△ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{2^2+(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 2(1+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2}$

よって　$A=60°$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sin B}$



したがって　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=60°$ より　$0°<B<120°$

よって　$B=45°$

このとき　$C=180°-(60°+45°)=75°$

圏　$A=60°$，$B=45°$，$C=75°$

$b=4$，$c=4\sqrt{3}$，$B=30°$ のとき，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

正弦定理により　$\dfrac{4}{\sin 30°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin C}$

したがって　$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

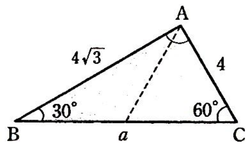
よって　$C=60°$　または　$C=120°$

[1]　$C=60°$ のとき

$A=180°-(30°+60°)=90°$

よって

$a=\dfrac{4}{\sin 30°}=8$

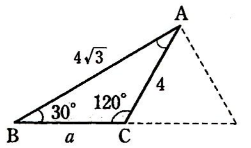


[2]　$C=120°$ のとき

$A=180°-(30°+120°)=30°$

よって，$A=B$ から

$a=b=4$



したがって　$a=8$，$A=90°$，$C=60°$

または　$a=4$，$A=30°$，$C=120°$　圏

△ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

正弦定理により，　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

が成り立つから　$a:b:c=3:5:7$

よって，正の定数 k を用いて，

$a=3k$，　$b=5k$，　$c=7k$

と表すことができるから　$a<b<c$

したがって，最大の辺は c となる。

最大の辺の対角が最大の角であるから，最大の角は C である。

余弦定理により

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\frac{1}{2}$$

よって，最大の角は　$C=120°$　圏

$a=5$，$b=7$，$c=8$ である △ABC の面積 S を求めよ。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 8}=\dfrac{11}{14}$

$0°<A<180°$ であるから　$\sin A>0$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$　圏

△ABC において，次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$

また，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを，与えられた関係式に代入すると

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $4Rabc$ を掛けて

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$

$(a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

a，b は正の数であるから　$a=b$　または　$c^2=a^2+b^2$

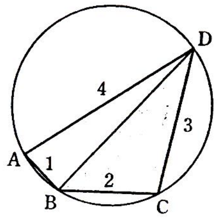
圏　$a=b$ である二等辺三角形　または　$C=90°$ の直角三角形

円に内接する四角形 ABCD において，AB=1，BC=2，CD=3，DA=4 であるとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

(1) △ABD において，余弦定理により

$$BD^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cos A$$
$$=17-8\cos A \quad \cdots\cdots ①$$



△BCD において，余弦定理により

$$BD^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-A)$$
$$=13+12\cos A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から

$$17-8\cos A=13+12\cos A$$

よって　$\cos A=\dfrac{1}{5}$　答

(2) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　$S=\triangle ABD+\triangle BCD$

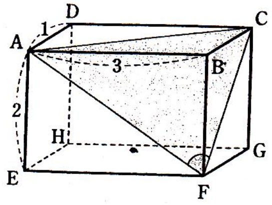
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$=2\sqrt{6}$$　答

右の図のような，

AB=3，AD=1，AE=2

である直方体 ABCD-EFGH があある。

△AFC の面積 S を求めよ。



三平方の定理により

$$AF^2=AB^2+BF^2=3^2+2^2=13$$
$$FC^2=BC^2+BF^2=1^2+2^2=5$$
$$CA^2=AB^2+BC^2=3^2+1^2=10$$

よって，△AFC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle AFC=\frac{13+5-10}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

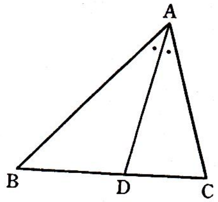
ゆえに　$\sin\angle AFC=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{7}{2}$$　答

∠A=60°，AB=8，AC=6 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

このとき，面積を利用して，線分 AD の長さを求めよ。



$$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$$

であるから

$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot8\cdot AD\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot AD\sin30^\circ$$

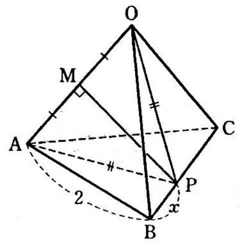
$$12\sqrt{3}=2AD+\frac{3}{2}AD$$

よって　$AD=\dfrac{24\sqrt{3}}{7}$　答

1 辺の長さが 2 である正四面体 OABC において，辺 OA の中点を M とする。辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とおくとき，線分 PM の長さを x の式で表せ。

△ABP において，余弦定理により

$$AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos\angle ABP$$
$$=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cos60^\circ$$
$$=x^2-2x+4$$



AP>0 より　$AP=\sqrt{x^2-2x+4}$

△ABP≡△OBP より，PA=PO で，M は辺 OA の中点であるから，∠PMA=90° である。

したがって，△APM において，三平方の定理により

$$PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\sqrt{x^2-2x+4-1^2}$$
$$=\sqrt{x^2-2x+3}$$　答