数学演習（三角比）Ｈ２３．９．９　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．ある地点 A から塔の先端 P を見上げた角は 30° で，その塔の方向に 30 m 歩いた地点 B から P を見上げた角は 45° であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは無視するものとする。

２．$\cos 80^\circ \sin 10^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ$ の値を求めよ。

３．$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

４．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

５．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

６．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

７．次のような △ABC において，A を求めよ。ただし，R は外接円の半径である。

(1)　$a = 5\sqrt{3}$，$R = 5$　　(2)　$a = \sqrt{2}$，$b = 2$，$c = \sqrt{3} - 1$

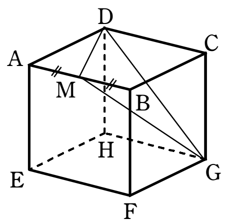
８．△ABC の 3 辺の長さが次のように与えられたとき，角 A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを，それぞれ調べよ。

(1)　$a = 7$，$b = 5$，$c = 4$　　(2)　$a = 5$，$b = 3$，$c = 4$　　(3)　$a = 11$，$b = 12$，$c = 13$

９．△ABC において，$b = 4$，$c = 4\sqrt{3}$，$B = 30^\circ$ のとき，a，A，C を求めよ。

10. 右図のような1辺の長さが2の立方体において，辺 AB の中点を M とする。次のものを求めよ。

(1)　線分 MG の長さ　　(2)　$\angle$DGM の大きさ



11. 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=5$，BC$=3$，CD$=2$，$\angle$ABC$=60^\circ$ であるとき，次のものを求めよ。

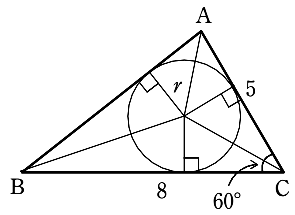
(1)　辺 DA の長さ　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

12. △ABC において，$b=15$，$c=10$，$A=60^\circ$ とする。$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

13. $a=8$，$b=5$，$C=60^\circ$ の △ABC について，次のものを求めよ。ただし，三角形のどの辺にも内接する円を，その三角形の内接円という。

(1)　△ABC の面積 S　　(2)　c

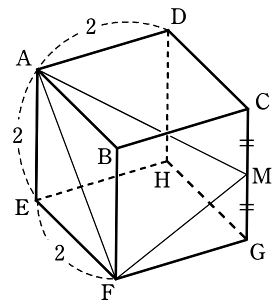
(3)　内接円の半径 r



14. 1辺の長さが2の立方体 ABCD$-$EFGH において，辺 CG の中点を M とする。

(1)　線分 AF，AM，FM の長さを求めよ。

(2)　$\angle$FAM の大きさを求めよ。



15. 右の図のように

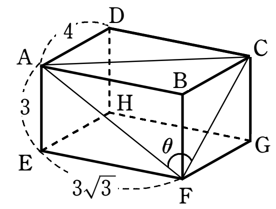
$$\text{AE}=3,\ \text{AD}=4,\ \text{EF}=3\sqrt{3}$$

である直方体 ABCD$-$EFGH がある。

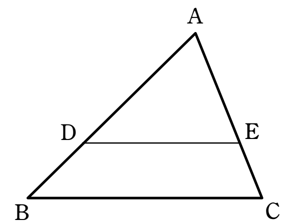
$\angle$AFC$=\theta$ とするとき

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　△ AFC の面積を求めよ。



16. △ABC において，点 D，E はそれぞれ辺AB，AC 上にあり，DE∥BC，AD : DB$=2:1$ を満たしている。△ABC の面積が 45 cm^2 のとき，台形 DBCE の面積を求めよ。



17. 直径が 6 cm である球の体積と表面積を求めよ。

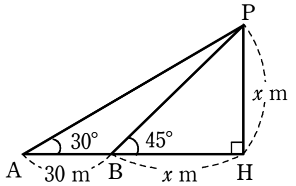
数学演習（三角比）Ｈ２３．９．９　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．ある地点Aから塔の先端Pを見上げた角は30°で，その塔の方向に30 m歩いた地点BからPを見上げた角は45°であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは無視するものとする。

解答　$15(\sqrt{3}+1)$ m

解説

右の図で，$\mathrm{PH}=x$ (m) とすると



$\tan 45^\circ=\dfrac{x}{\mathrm{BH}}$　すなわち　$1=\dfrac{x}{\mathrm{BH}}$

よって　$\mathrm{BH}=x$

△AHPについて

$\mathrm{PH}=(\mathrm{AB}+\mathrm{BH})\tan 30^\circ$

すなわち　$x=(30+x)\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

整理して　$(\sqrt{3}-1)x=30$

よって　$x=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=15(\sqrt{3}+1)$

したがって，塔の高さは　$15(\sqrt{3}+1)$ m

2．$\cos 80^\circ\sin 10^\circ+\cos 10^\circ\sin 80^\circ$ の値を求めよ。

解答　1

解説

$\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ$,

$\sin 80^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)=\cos 10^\circ$

よって　(与式)$=\sin 10^\circ\sin 10^\circ+\cos 10^\circ\cos 10^\circ=\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ=1$

3．$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　または　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

解説

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

よって　$\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{3}{5}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき　$\tan\theta=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}$

$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき　$\tan\theta=\dfrac{4}{5}\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{4}{3}$

4．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=-3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

解説

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-3)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

5．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta=\sqrt{3}$

解答　(1)　$\theta=45^\circ$，135°　(2)　$\theta=150^\circ$　(3)　$\theta=60^\circ$

解説

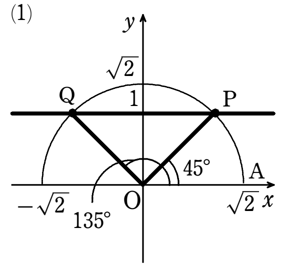
(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は，[図] で ∠AOP と ∠AOQ であるから

$\theta=45^\circ$，135°

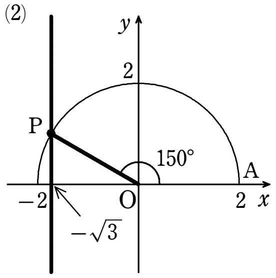
(2)　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は，[図] で ∠AOP であるから　$\theta=150^\circ$

(3)　$\tan\theta=\sqrt{3}$ を満たす θ は，[図] で ∠AOP であるから　$\theta=60^\circ$

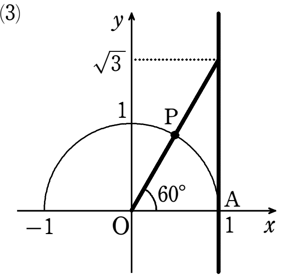
(1)



(2)



(3)



6．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解答　(1)　$30^\circ<\theta<150^\circ$　(2)　$135^\circ<\theta\leqq 180^\circ$　(3)　$30^\circ\leqq\theta<90^\circ$

解説

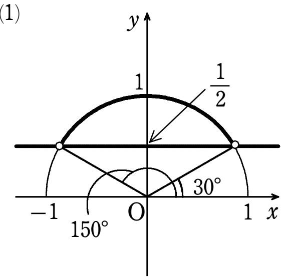
(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta=30^\circ$，150°

[図] から，不等式を満たす θ の値の範囲は　$30^\circ<\theta<150^\circ$

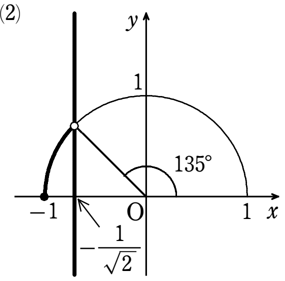
(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　$\theta=135^\circ$

[図] から，不等式を満たす θ の値の範囲は　$135^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

(1)



(2)

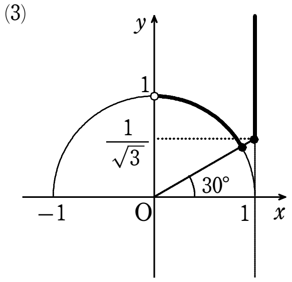


(3)　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は　$\theta=30^\circ$

[図] から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$30^\circ\leqq\theta<90^\circ$

(3)



7．次のような △ABC において，A を求めよ。ただし，R は外接円の半径である。

(1)　$a=5\sqrt{3}$，$R=5$　　(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$

解答　(1)　$A=60^\circ$，120°　(2)　$A=30^\circ$

解説

(1)　正弦定理により　$2R=\dfrac{a}{\sin A}$　より　$\sin A=\dfrac{a}{2R}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$A=60^\circ$，120°

(2)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$A=30^\circ$

8．△ABC の3辺の長さが次のように与えられたとき，角 A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを，それぞれ調べよ。

(1)　$a=7$，$b=5$，$c=4$　　(2)　$a=5$，$b=3$，$c=4$　　(3)　$a=11$，$b=12$，$c=13$

解答　(1)　鈍角　(2)　直角　(3)　鋭角

解説

(1)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 4}=-\dfrac{1}{5}<0$

よって，角 A は鈍角である。

(2)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{3^2+4^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 4}=0$

よって，角 A は直角である。

(3)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{12^2+13^2-11^2}{2\cdot 12\cdot 13}=\dfrac{144+169-121}{2\cdot 12\cdot 13}=\dfrac{192}{2\cdot 12\cdot 13}$

$=\dfrac{8}{13}>0$

よって，角 A は鋭角である。

9．△ABC において，$b=4$，$c=4\sqrt{3}$，$B=30^\circ$ のとき，a，A，C を求めよ。

解答　$a=8$，$A=90^\circ$，$C=60^\circ$　または　$a=4$，$A=30^\circ$，$C=120^\circ$

解説

正弦定理により　$\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より，$0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ$，120,

[1]　$C=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

三平方の定理により　$a=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{64}=8$

[2]　$C=120°$ のとき　　$A=180°-(30°+120°)=30°$

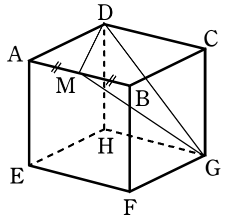
余弦定理により　　$a^2=4^2+(4\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot4\sqrt{3}\cos30°=16$

$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{16}=4$

以上から　　$a=8$，$A=90°$，$C=60°$　または　$a=4$，$A=30°$，$C=120°$

10. 右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体において，辺 AB の中点を M とする。次のものを求めよ。

(1)　線分 MG の長さ　　(2)　$\angle$DGM の大きさ



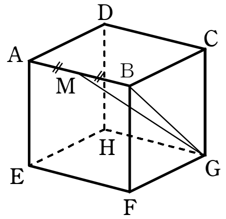
解答　(1)　3　　(2)　45°

解説

(1)　直角三角形 MBG において

$$\mathrm{MG}^2=\mathrm{MB}^2+\mathrm{BG}^2=\mathrm{MB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CG}^2$$
$$=1^2+2^2+2^2=9$$

MG>0 であるから　　MG$=3$



(2)　$\mathrm{DM}=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{AD}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{DC}^2+\mathrm{CG}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle$DGM において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{DGM}=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\frac{12}{12\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\angle\mathrm{DGM}=45°$

11. 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=5$，BC$=3$，CD$=2$，$\angle$ABC$=60°$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　辺 DA の長さ　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

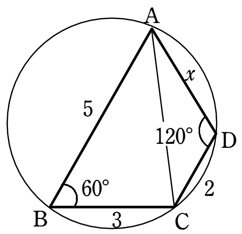
解答　(1)　DA$=3$　　(2)　$S=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　$\triangle$ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos60°=19$$

ゆえに　　AC$=\sqrt{19}$



また，四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{ADC}=180°-60°=120°$$

DA$=x$ とおき，$\triangle$ACD に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{19})^2=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cos120°$$

よって　　$x^2+2x-15=0$

ゆえに　　$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$ であるから　　$x=3$

すなわち　DA$=3$

(2)　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\sin60°+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin120°=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

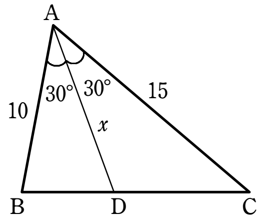
12. $\triangle$ABC において，$b=15$，$c=10$，$A=60°$ とする。$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解答　$6\sqrt{3}$

解説

AD$=x$ とおく。

$\triangle$ABC$=\triangle$ABD$+\triangle$ACD であるから



$$\frac{1}{2}\cdot10\cdot15\sin60°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot x\sin30°+\frac{1}{2}\cdot15\cdot x\sin30°$$

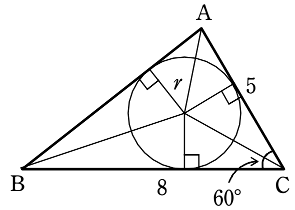
よって　　$\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{15}{4}x$

これを解くと　　$x=6\sqrt{3}$　　　したがって　　AD$=6\sqrt{3}$

13. $a=8$，$b=5$，$C=60°$ の $\triangle$ABC について，次のものを求めよ。ただし，三角形のどの辺にも内接する円を，その三角形の内接円という。

(1)　$\triangle$ABC の面積 S　　　(2)　c

(3)　内接円の半径 r



解答　(1)　$S=10\sqrt{3}$　　(2)　$c=7$　　(3)　$r=\sqrt{3}$

解説

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60°=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

(2)　余弦定理により　　$c^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos60°=49$

$c>0$ であるから　　$c=7$

(3)　内接円の中心を I とすると　　$S=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}$

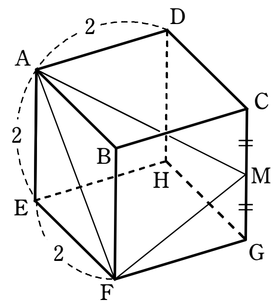
よって　　$S=\dfrac{1}{2}cr+\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br$　　すなわち　　$10\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}r(7+8+5)$

したがって　　$r=\dfrac{2\cdot10\sqrt{3}}{7+8+5}=\sqrt{3}$

14. 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD$-$EFGH において，辺 CG の中点を M とする。

(1)　線分 AF，AM，FM の長さを求めよ。

(2)　$\angle$FAM の大きさを求めよ。



解答　(1)　AF$=2\sqrt{2}$，AM$=3$，FM$=\sqrt{5}$　　(2)　$\angle$FAM$=45°$

解説

(1)　$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AE}^2+\mathrm{EF}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

同様に　　AC$=2\sqrt{2}$

よって　　$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

また　　$\mathrm{FM}=\sqrt{\mathrm{FG}^2+\mathrm{MG}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2)　$\triangle$AFM において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{FAM}=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AM}^2-\mathrm{FM}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AM}}=\frac{(2\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　　$\angle\mathrm{FAM}=45°$

15. 右の図のように

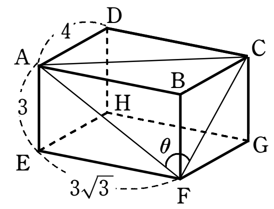
AE$=3$，AD$=4$，EF$=3\sqrt{3}$

である直方体 ABCD$-$EFGH がある。

$\angle$AFC$=\theta$ とするとき

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\triangle$ AFC の面積を求めよ。



解答　(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{10}$　　(2)　$\dfrac{3\sqrt{91}}{2}$

解説

(1)　三平方の定理により　　$\mathrm{AF}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$，

$\mathrm{CF}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$，

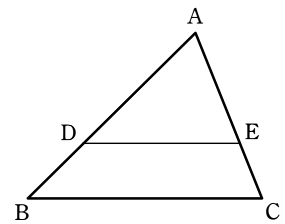
$\mathrm{AC}=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{43}$

よって，余弦定理により　　$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}=\dfrac{36+25-43}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{3}{10}$

(2)　$\sin\theta>0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{91}}{10}$

よって，求める面積は　　$\dfrac{1}{2}\mathrm{FA}\cdot\mathrm{FC}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{91}}{10}=\dfrac{3\sqrt{91}}{2}$

16. $\triangle$ABC において，点 D，E はそれぞれ辺AB，AC 上にあり，DE$/\!/$BC，AD : DB$=2:1$ を満たしている。$\triangle$ABC の面積が 45 cm^2 のとき，台形 DBCE の面積を求めよ。



解答　25 cm^2

解説

$\triangle$ADE $\backsim$ $\triangle$ABC で，相似比は　　AD : AB$=2:3$

ゆえに　　$\triangle$ADE : $\triangle$ABC$=2^2:3^2=4:9$

よって　　(台形DBCE) : $\triangle$ABC$=(\triangle$ABC$-\triangle$ADE$)$: $\triangle$ABC$=(9-4):9=5:9$

したがって，求める面積は　　$45\times\dfrac{5}{9}=25$ (cm^2)

17. 直径が 6 cm である球の体積と表面積を求めよ。

解答　順に　36π cm^3，36π cm^2

解説

球の半径は　　$6\div2=3$ (cm) であるから

体積は　　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ (cm^3)，

表面積は　　$4\pi\cdot3^2=36\pi$ (cm^2)