数学演習（図形の計量）Ｈ２５．９．２０　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$A=75°$，$B=45°$，$c=\sqrt{6}$ のとき　b

(2)　$a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2$ のとき　A

2．△ABCの3辺の長さが$a=7$，$b=5$，$c=4$のとき，この三角形は鋭角三角形か，直角三角形か，鈍角三角形か。

3．△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$a=\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=105°$ のとき　b，c，A

(2)　$\sin A:\sin B:\sin C=13:8:7$ のとき，最大の角

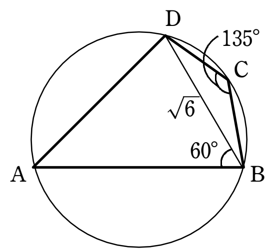
4．右の図のような円に内接する四角形ABCDにおいて，

$\angle\mathrm{ABD}=60°$，$\angle\mathrm{BCD}=135°$，$\mathrm{BD}=\sqrt{6}$

のとき，次のものを求めよ。

(1)　円の半径 R

(2)　辺ADの長さ



5．$a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABCについて，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値

(2)　△ABCの面積 S

(3)　外接円の半径 R

(4)　内接円の半径 r

6．△ABCにおいて，$b=15$，$c=10$，$A=60°$ とする。∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ。

7．円に内接する四角形 ABCD があり，AB＝1，BC＝2，CD＝3，DA＝4 のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

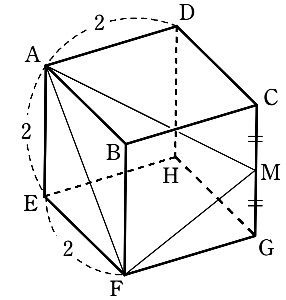
8．△ABC の辺 BC の中点を M とする。$b=2$，$c=3$，$A=60^\circ$ のとき，線分 AM の長さを求めよ。

9．等式 $\sin C=2\sin A\cos B$ が成り立つ △ABC はどんな形の三角形か。

10．1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD－EFGH において，辺 CG の中点を M とする。

(1)　線分 AF，AM，FM の長さを求めよ。

(2)　∠FAM の大きさを求めよ。



数学演習（図形の計量）Ｈ２５．９．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$A=75°$，$B=45°$，$c=\sqrt{6}$ のとき　b

(2)　$a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2$ のとき　A

解答　(1)　$b=2$　　(2)　$A=120°$

解説

(1)　$C=180°-(75°+45°)=60°$

正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60°}$

よって　$b\sin 60°=\sqrt{6}\sin 45°$　から

$b=\sqrt{6}\sin 45°\div\sin 60°=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2$

(2)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$0°<A<180°$ から　$A=120°$

2．△ABC の 3 辺の長さが $a=7$，$b=5$，$c=4$ のとき，この三角形は鋭角三角形か，直角三角形か，鈍角三角形か。

解答　鈍角三角形

解説

a が一番長いので，対角の A が最大角である。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 4}=-\dfrac{1}{5}<0$

よって，$0°<A<180°$ から角 A は鈍角となるから，この三角形は鈍角三角形である。

3．△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$a=\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=105°$ のとき　b，c，A

(2)　$\sin A:\sin B:\sin C=13:8:7$ のとき，最大の角

解答　(1)　$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=30°$　　(2)　$120°$

解説

(1)　$A=180°-(45°+105°)=30°$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$

よって　$\sqrt{2}\sin 45°=b\sin 30°$　から　$b=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}=2$

余弦定理により　$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cos 45°$

整理して　$c^2-2c-2=0$

これを解くと　$c=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}}{1}=1\pm\sqrt{3}$

$c>0$ であるから　$c=1+\sqrt{3}$

(2)　正弦定理により　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

が成り立つから　$a:b:c=13:8:7$

よって，a が一番長いから，a の対角である A が最大角となる

k を正の数として，$a=13k$，$b=8k$，$c=7k$ とするとき，余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(8k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\cdot 8k\cdot 7k}=-\frac{56}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{1}{2}$$

よって　$0°<A<180°$ から　$A=120°$

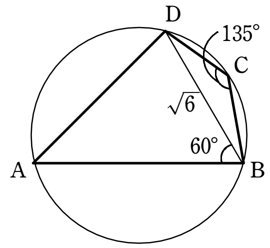
4．右の図のような円に内接する四角形 ABCD において，

$\angle\mathrm{ABD}=60°$，$\angle\mathrm{BCD}=135°$，$\mathrm{BD}=\sqrt{6}$

のとき，次のものを求めよ。

(1)　円の半径 R

(2)　辺 AD の長さ



解答　(1)　$R=\sqrt{3}$　　(2)　$\mathrm{AD}=3$

解説

(1)　△BCD において，正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 135°}=2R$

よって　$2R=\sqrt{6}\div\sin 135°=\sqrt{6}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$

ゆえに　$2R=2\sqrt{3}$　から　$R=\sqrt{3}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180°$

よって　$\angle\mathrm{BAD}=180°-\angle\mathrm{BCD}=180°-135°=45°$

ゆえに，△ABD において，正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 45°}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin 60°}$

したがって　$\mathrm{AD}\sin 45°=\sqrt{6}\sin 60°$

から　$\mathrm{AD}=\sqrt{6}\sin 60°\div\sin 45°=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3$

5．$a=4$，$b=5$，$c=6$ である △ABC について，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　△ABC の面積 S

(3)　外接円の半径 R　　(4)　内接円の半径 r

解答　(1)　$\dfrac{3}{4}$　　(2)　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$　　(3)　$\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解説

(1)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{3}{4}$

(2)　$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

(3)　正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

よって　$2R=a\div\sin A=4\div\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{16}{\sqrt{7}}$

ゆえに　$2R=\dfrac{16}{\sqrt{7}}$　から　$R=\dfrac{8}{\sqrt{7}}=\dfrac{8}{7}\sqrt{7}$

(4)　$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{2}r(4+5+6)$

よって　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{2}r\cdot 15$　から　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

6．△ABC において，$b=15$，$c=10$，$A=60°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解答　$6\sqrt{3}$

解説

$\mathrm{AD}=x$ とおく。

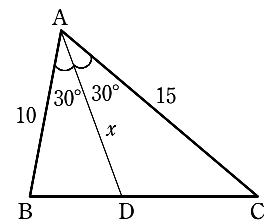
△ABC＝△ABD＋△ACD であるから

$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot x\sin 30°+\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot x\sin 30°$

よって　$\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{15}{4}x$

これを解くと　$x=6\sqrt{3}$　　したがって　$\mathrm{AD}=6\sqrt{3}$



7．円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=1$，$BC=2$，$CD=3$，$DA=4$ のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

解答　(1)　$\cos A=\dfrac{1}{5}$　　(2)　$2\sqrt{6}$

解説

(1)　△ABD に余弦定理を適用して

$$BD^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cos A$$
$$=17-8\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

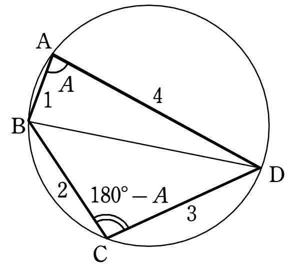
四角形 ABCD は円に内接しているから

$A+C=180^\circ$　　よって　$C=180^\circ-A$

ゆえに，△BCD に余弦定理を適用して

$$BD^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-A)$$
$$=13+12\cos A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$17-8\cos A=13+12\cos A$



整理して　$20\cos A=4$　　よって　$\cos A=\dfrac{1}{5}$

(2)　$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

したがって　$S=\triangle ABD+\triangle BCD$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin A+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$=2\sqrt{6}$$

8．△ABC の辺 BC の中点を M とする。$b=2$，$c=3$，$A=60^\circ$ のとき，線分 AM の長さを求めよ。

解答　$AM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

解説

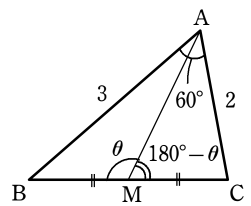
△ABC において，余弦定理により

$$BC^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7$$

$BC>0$ であるから　$BC=\sqrt{7}$

よって　$BM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\angle AMB=\theta$ とおくと　$\angle AMC=180^\circ-\theta$



△AMB に余弦定理を適用すると

$$3^2=AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2AM\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

△AMC に余弦定理を適用すると

$$2^2=AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2AM\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cos(180^\circ-\theta)$$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ であるから，

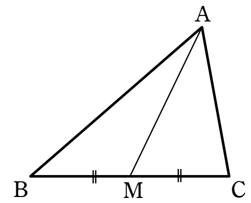
$$2^2=AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+2AM\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①＋② より

$$3^2+2^2=2AM^2+2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \quad より \quad 13=2AM^2+\frac{7}{2} \quad すなわち \quad AM^2=\frac{19}{4}$$

$AM>0$ であるから　$AM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

別解



三角形ABCにおいて，辺BCの中点をMとする。すると，

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

という公式が成り立つ。この公式を中線定理という。

中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ により

$$3^2+2^2=2\left\{AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right\}$$

よって　$AM^2=\dfrac{19}{4}$　　したがって　$AM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

9．等式 $\sin C=2\sin A\cos B$ が成り立つ △ABC はどんな形の三角形か。

解答　$a=b$ の二等辺三角形

解説

△ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

また，余弦定理により　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを等式 $\sin C=2\sin A\cos B$ に代入して

$$\frac{c}{2R}=2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

右辺を約分すると　$\dfrac{c}{2R}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2Rc}$

両辺に $2Rc$ をかけて　$c^2=c^2+a^2-b^2$　よって　$a^2=b^2$　ゆえに　$a=\pm b$

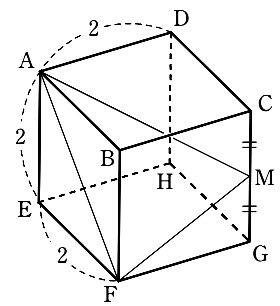
$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

したがって，△ABC は $a=b$ の二等辺三角形である。

10．1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD−EFGH において，辺 CG の中点を M とする。

(1)　線分 AF，AM，FM の長さを求めよ。

(2)　∠FAM の大きさを求めよ。



解答　(1)　$AF=2\sqrt{2}$，$AM=3$，$FM=\sqrt{5}$　　(2)　$\angle FAM=45^\circ$

解説

(1)　三角形AEFにおいて　$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

同様に三角形ABCにおいて　$AC=2\sqrt{2}$

ここで三角形ACMを考えると，$\angle ACM=90^\circ$なので，三角形ACMは直角三角形となるから

$$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3$$

また三角形FGMにおいて　$FM=\sqrt{FG^2+MG^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2)　△AFM において，余弦定理により

$$\cos\angle FAM=\frac{AF^2+AM^2-FM^2}{2AF\cdot AM}=\frac{(2\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\angle FAM=45^\circ$