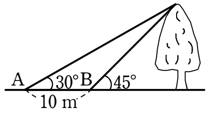
数学演習（三角比）Ｈ２１．８．２７　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．平地に立っている木の高さを知るために，木の前方の地点 A から測った木の頂点の仰角が 30°，A から木に向かって 10 m 近づいた地点 B から測った仰角が 45° であった。木の高さを求めよ。



２．(1)　$\cos 135^\circ \times \sin 120^\circ \times \tan 150^\circ \div \cos 60^\circ$ の値を求めよ。

(2)　$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ + \sin 160^\circ + \cos 170^\circ$ を簡単にせよ。

３．頂角 A が 36° の二等辺三角形 ABC がある。この三角形の底角 C の二等分線と辺 AB との交点を D とする。

(1)　$BC=1$ のとき，線分 DB，AC の長さを求めよ。

(2)　(1) の結果を用いて，$\cos 36^\circ$ の値を求めよ。

４．$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。$4\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

５．$AB=6$，$BC=4$，$CA=5$ の三角形 ABC の $\angle B$ の二等分線が辺 AC と交わる点を D とするとき，線分 BD の長さを求めよ。

6. △ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

7. △ABC において，$a=4$，$b=5$ とする。

(1) 辺の長さ c の範囲を求めよ。

(2) △ABC が鈍角三角形のとき，辺の長さ c の範囲を求めよ。

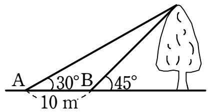
8. △ABC において，$B=30°$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$ のとき，A，C，a を求めよ。

9. 1 km 離れた海上の 2 点 A，B から，山頂 C を見上げたところ，A からは真東の方向に仰角 60°，B からは真北の方向から 60° 東の方向に仰角 45° で見えた。この山の高さ CD を求めよ。

10. △ABC において，$c\cos B = b\cos C$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

数学演習（三角比）Ｈ２１．８．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. 平地に立っている木の高さを知るために，木の前方の地点 A から測った木の頂点の仰角が 30°，A から木に向かって 10 m 近づいた地点 B から測った仰角が 45° であった。木の高さを求めよ。

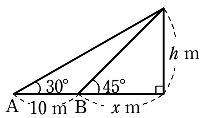


解答　$5(\sqrt{3}+1)$ m

木の高さを h m，木の根元と B との距離を x m とすると

$$h=(10+x)\tan 30^\circ$$
$$=(10+x)\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\cdots\cdots①$$

また　$h=x\tan 45^\circ=x$　……②



①，② から　$(10+x)\dfrac{1}{\sqrt{3}}=x$

よって　$10+x=\sqrt{3}\,x$　　すなわち　$(\sqrt{3}-1)x=10$

ゆえに　$x=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$

よって，木の高さは，② から　$h=x=5(\sqrt{3}+1)$ (m)

2. (1)　$\cos 135^\circ\times\sin 120^\circ\times\tan 150^\circ\div\cos 60^\circ$ の値を求めよ。

(2)　$\sin 80^\circ+\cos 110^\circ+\sin 160^\circ+\cos 170^\circ$ を簡単にせよ。

解答　(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　0

(1)　(与式)$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

別解　$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ$

$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ$

$\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\dfrac{1}{\tan 60^\circ}=-\dfrac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$

よって，与式は

$$(-\cos 45^\circ)\times\sin 60^\circ\times\left(-\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right)\div\cos 60^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)　(与式)$=\sin(90^\circ-10^\circ)+\cos(90^\circ+20^\circ)+\sin(180^\circ-20^\circ)+\cos(180^\circ-10^\circ)$

$=\cos 10^\circ-\sin 20^\circ+\sin 20^\circ-\cos 10^\circ=0$

3. 頂角 A が 36° の二等辺三角形 ABC がある。この三角形の底角 C の二等分線と辺 AB との交点を D とする。

(1)　BC＝1 のとき，線分 DB，AC の長さを求めよ。

(2)　(1) の結果を用いて，cos 36° の値を求めよ。

解答　(1)　$\mathrm{DB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　(2)　$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(1)　$\angle\mathrm{ACB}=(180^\circ-36^\circ)\div 2=72^\circ$ であるから

$\angle\mathrm{DCB}=72^\circ\div 2=36^\circ$

△ABC と △CDB において

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DCB}=36^\circ$，$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CBD}=72^\circ$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CDB}$

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}$ から

$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DB}$　……①

AD＝CD＝BC＝1 であり，DB＝x とおくと

AB＝AD＋DB＝1＋x であるから，① は

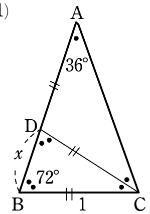
$1^2=(1+x)x$　　よって　$x^2+x-1=0$

これを解いて　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　すなわち　$\mathrm{DB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

また　$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}=1+x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(1)

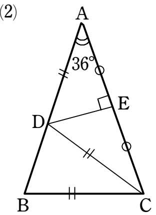


(2)　辺 AC の中点を E とすると，△DAC は二等辺三角形であるから　DE⊥AC

(1) から　AD＝1，$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

ゆえに　$\cos 36^\circ=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(2)



4. $0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$4\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　-7

$4\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{2}$ を変形して

$4\cos\theta=\sqrt{2}-2\sin\theta$　……①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺に 16 を掛けて

$16\sin^2\theta+16\cos^2\theta=16$　……②

① を ② に代入して

$16\sin^2\theta+(\sqrt{2}-2\sin\theta)^2=16$

整理すると　$10\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta-7=0$

ここで，$\sin\theta=t$ とおくと　$10t^2-2\sqrt{2}\,t-7=0$

これを解いて　$t=\dfrac{\sqrt{2}\pm 6\sqrt{2}}{10}$

よって　$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$0<\sin\theta<1$

ゆえに　$\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

① から　$4\cos\theta=\sqrt{2}-2\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{10}$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

したがって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\div\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)=-7$

5. AB＝6，BC＝4，CA＝5 の三角形 ABC の ∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とするとき，線分 BD の長さを求めよ。

解答　$3\sqrt{2}$

BD は ∠B の二等分線であるから

CD : DA＝BC : BA

AB＝6，BC＝4，CA＝5 から

$\mathrm{CD}=\dfrac{4}{4+6}\cdot 5=2$

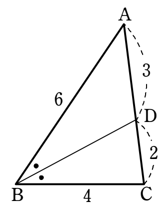
△ABC に余弦定理を適用すると

$\cos C=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{8}$

ゆえに，△BCD に余弦定理を適用すると

$\mathrm{BD}^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\dfrac{1}{8}=18$

BD＞0 であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$



6. △ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

解答　$A = 120°$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

よって　$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C$

$= \sin A : \sin B : \sin C$

$= 7 : 5 : 3$

ゆえに，$a = 7k$，$b = 5k$，$c = 3k$ $(k > 0)$ とおける。

よって，a が最大辺で，A が最大の角である。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

したがって，最大の角は　$A = 120°$

7. △ABC において，$a = 4$，$b = 5$ とする。

(1)　辺の長さ c の範囲を求めよ。

(2)　△ABC が鈍角三角形のとき，辺の長さ c の範囲を求めよ。

解答　(1)　$1 < c < 9$　　(2)　$1 < c < 3$，$\sqrt{41} < c < 9$

(1)　三角形の成立条件から　$|a - b| < c < a + b$

よって　$|4 - 5| < c < 4 + 5$

ゆえに　$1 < c < 9$　……①

(2)　∠A が鈍角のとき　$a^2 > b^2 + c^2$ から　$4^2 > 5^2 + c^2$

これを満たす c はない。

∠B が鈍角のとき　$b^2 > c^2 + a^2$ から　$5^2 > 4^2 + c^2$

ゆえに　$c^2 < 9$

$c > 0$ であるから　$0 < c < 3$　……②

∠C が鈍角のとき　$c^2 > a^2 + b^2$ から　$c^2 > 4^2 + 5^2$

ゆえに　$c^2 > 41$

$c > 0$ であるから　$c > \sqrt{41}$　……③

②，③ を合わせた範囲は　$0 < c < 3$，$\sqrt{41} < c$　……④

よって，求める c の値の範囲は，①，④ の共通範囲で

$1 < c < 3$，$\sqrt{41} < c < 9$

8. △ABC において，$B = 30°$，$b = \sqrt{2}$，$c = 2$ のとき，A，C，a を求めよ。

解答　$A = 105°$，$C = 45°$，$a = \sqrt{3} + 1$；$A = 15°$，$C = 135°$，$a = \sqrt{3} - 1$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°} = \dfrac{2}{\sin C}$

ゆえに　$\sin C = \dfrac{2\sin 30°}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0° < C < 180° - B = 150°$ から　$C = 45°$　または　$135°$

[1]　$C = 45°$ のとき

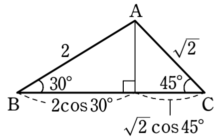
$A = 180° - (B + C)$

$= 180° - (30° + 45°) = 105°$

また

$a = 2\cos 30° + \sqrt{2}\cos 45°$

$= \sqrt{3} + 1$



[2]　$C = 135°$ のとき

$A = 180° - (B + C)$

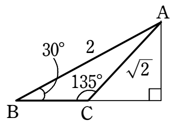
$= 180° - (30° + 135°) = 15°$

また

$a = 2\cos 30° - \sqrt{2}\cos(180° - 135°)$

$= 2\cos 30° + \sqrt{2}\cos 135°$

$= \sqrt{3} - 1$



9. 1 km 離れた海上の 2 点 A，B から，山頂 C を見上げたところ，A からは真東の方向に仰角 60°，B からは真北の方向から 60° 東の方向に仰角 45° で見えた。この山の高さ CD を求めよ。

解答　$\sqrt{3}$ km

山の高さ CD を h km とおく。

直角三角形 ACD において

$$\mathrm{AD} = \frac{h}{\tan 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 BCD において

$$\mathrm{BD} = \frac{h}{\tan 45°} = h$$

△ABD において　∠ADB $= 30°$

余弦定理により

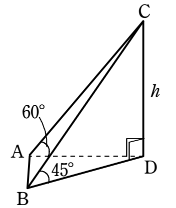
$$1^2 = \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2 - 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot h\cos 30°$$

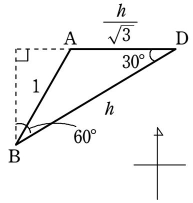
ゆえに　$1 = \dfrac{h^2}{3} + h^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}h^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$h^2 = 3$

$h > 0$ であるから　$h = \sqrt{3}$

したがって　$\mathrm{CD} = \sqrt{3}$ (km)





10. △ABC において，$c\cos B = b\cos C$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

解答　AB = AC の二等辺三角形

余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを $c\cos B = b\cos C$ に代入すると

$$c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ゆえに　$\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

よって，$c^2 + a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - c^2$ から　$2c^2 = 2b^2$

すなわち　$c^2 = b^2$

$b > 0$，$c > 0$ であるから　$c = b$

ゆえに，△ABC は　AB = AC の二等辺三角形

別解　$c\cos B = b\cos C$　……①

したがって，∠B，∠C は鋭角で，△ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると

$c\cos B = \mathrm{BH}$，　$b\cos C = \mathrm{CH}$

① から　BH = CH

A からの垂線が底辺を 2 等分するから，△ABC は

AB = AC の二等辺三角形