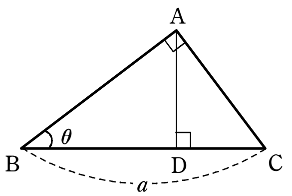
数学演習（三角比）Ｈ２５．９．９　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．ある地点 A から塔の先端 P を見上げた角は 30° で，その塔の方向に 30 m 歩いた地点 B から P を見上げた角は 45° であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは無視するものとする。

2．$\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC の頂点 A から斜辺 BC に垂線 AD を下ろす。
$\angle ABC=\theta$，$BC=a$ であるとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。
(1)　AB　　(2)　AD　　(3)　CD



3．次の式の値を求めよ。
(1)　$\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ$　　(2)　$\tan 35^\circ \tan 55^\circ-\tan 15^\circ \tan 75^\circ$
(3)　$(\sin 70^\circ+\sin 20^\circ)^2-2\tan 70^\circ \cos^2 70^\circ$

4．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=-3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

5．$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

6．$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。
(1)　$2\sin\theta=1$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=1$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=-1$

7．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の等式を満たす θ を求めよ。　$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

8．$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1)　$2\sin\theta \leqq \sqrt{2}$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0$　　(3)　$\tan\theta + \sqrt{3} \geqq 0$

9．$0° \leqq \theta \leqq 180°$，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

10. 次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin(90° - \theta) - \cos(90° - \theta) + \sin(180° - \theta) + \cos(180° - \theta)$

(2)　$\sin(90° + \theta)\sin(90° - \theta) - \cos(90° + \theta)\cos(90° - \theta)$

11. $0° \leqq \theta \leqq 180°$において，次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta + 2$　　(2)　$-3\cos\theta + 1$

12. θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で動くとき，$y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。
また，そのときの θ も求めよ。

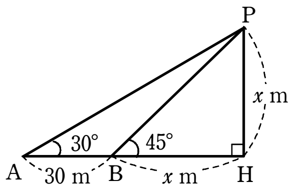
数学演習（三角比）Ｈ２５．９．９　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．ある地点 A から塔の先端 P を見上げた角は 30° で，その塔の方向に 30 m 歩いた地点 B から P を見上げた角は 45° であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは無視するものとする。

解答　$15(\sqrt{3}+1)$ m

解説

右の図で，$PH=x$ (m) とすると



$\tan 45^\circ=\dfrac{x}{BH}$　すなわち　$1=\dfrac{x}{BH}$

よって　$BH=x$

△AHP について

$\dfrac{PH}{AH}=\tan 30^\circ$　より　$PH=AH\tan 30^\circ$

ゆえに　$PH=(AB+BH)\tan 30^\circ$

すなわち　$x=(30+x)\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

両辺に$\sqrt{3}$をかけて　$\sqrt{3}x=30+x$　より　$\sqrt{3}x-x=30$

左辺をxでくくって　$(\sqrt{3}-1)x=30$

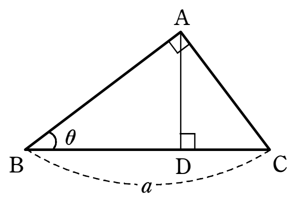
よって両辺を$\sqrt{3}-1$で割って，有理化すると

$$x=\frac{30}{\sqrt{3}-1}=\frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=15(\sqrt{3}+1)$$

したがって，塔の高さは　$15(\sqrt{3}+1)$ m

2．$\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC の頂点 A から斜辺 BC に垂線 AD を下ろす。
$\angle ABC=\theta$，$BC=a$ であるとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。

(1)　AB　　(2)　AD　　(3)　CD



解答　(1)　$a\cos\theta$　　(2)　$a\sin\theta\cos\theta$　　(3)　$a\sin^2\theta$

解説

(1)　△ABCにおいて$\dfrac{AB}{BC}=\cos\theta$　より　$AB=BC\cos\theta=a\cos\theta$

(2)　△ABDにおいて$\dfrac{AD}{AB}=\sin\theta$　より

$AD=AB\sin\theta=a\cos\theta\cdot\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$

(3)　△ABDと△CADは相似なので　$\angle CAD=\theta$ である

△CADにおいて　$\dfrac{CD}{AC}=\sin\theta$　より　$CD=AC\sin\theta=BC\sin\theta\cdot\sin\theta=a\sin^2\theta$

別解　△ABDにおいて$\dfrac{BD}{AB}=\cos\theta$　より

$BD=AB\cos\theta=a\cos\theta\cdot\cos\theta=a\cos^2\theta$

ゆえに　$CD=BC-BD=a-a\cos^2\theta=a(1-\cos^2\theta)=a\sin^2\theta$

3．次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ$　　(2)　$\tan 35^\circ\tan 55^\circ-\tan 15^\circ\tan 75^\circ$

(3)　$(\sin 70^\circ+\sin 20^\circ)^2-2\tan 70^\circ\cos^2 70^\circ$

解答　(1)　1　　(2)　0　　(3)　1

解説

(1)　(与式)$=\sin^2 40^\circ+\sin^2(90^\circ-40^\circ)=\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ=1$

(2)　(与式)$=\tan 35^\circ\tan(90^\circ-35^\circ)-\tan 15^\circ\tan(90^\circ-15^\circ)$

$=\tan 35^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 35^\circ}-\tan 15^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 15^\circ}=1-1=0$

(3)　(与式)$=\{\sin 70^\circ+\sin(90^\circ-70^\circ)\}^2-2\dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}\cdot\cos^2 70^\circ$

$=(\sin 70^\circ+\cos 70^\circ)^2-2\sin 70^\circ\cos 70^\circ$

$=(\sin^2 70^\circ+2\sin 70^\circ\cos 70^\circ+\cos^2 70^\circ)-2\sin 70^\circ\cos 70^\circ$

$=\sin^2 70^\circ+\cos^2 70^\circ=1$

4．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=-3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

解説

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-3)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

5．$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ または $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

解説

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

よって　$\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{3}{5}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき　$\tan\theta=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}$

$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき　$\tan\theta=\dfrac{4}{5}\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{4}{3}$

6．$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$2\sin\theta=1$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=1$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=-1$

解答　(1)　$\theta=30^\circ$，150°　　(2)　$\theta=45^\circ$，315°　　(3)　$\theta=150^\circ$，330°

解説

(1)　$2\sin\theta=1$ から　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　よって　$\theta=30^\circ$，150°

(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=1$ から　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって　$\theta=45^\circ$，315°

(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=-1$ から　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　よって　$\theta=150^\circ$，330°

7．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の等式を満たす θ を求めよ。　$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

解答　$\theta = 60°$

解説

$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ に $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入して

$2(1-\cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

ゆえに　$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

左辺を因数分解して　$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

よって　$\cos\theta + 2 = 0$　または　$2\cos\theta - 1 = 0$

つまり　$\cos\theta = -2,\ \dfrac{1}{2}$

ここで　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ から　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$　より　$\cos\theta = -2$　は不適

したがって　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

これを満たす θ は$0° \leqq \theta \leqq 180°$　より　$\theta = 60°$

8．$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1)　$2\sin\theta \leqq \sqrt{2}$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0$　　(3)　$\tan\theta + \sqrt{3} \geqq 0$

解答　(1)　$0° \leqq \theta \leqq 45°,\ 135° \leqq \theta < 360°$　　(2)　$0° \leqq \theta < 135°,\ 225° < \theta < 360°$

(3)　$0° \leqq \theta < 90°,\ 120° \leqq \theta < 270°,\ 300° \leqq \theta < 360°$

解説

(1)　$2\sin\theta \leqq \sqrt{2}$ から　$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を求めると　$\theta = 45°,\ 135°$

ゆえに，$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす範囲は$0° \leqq \theta \leqq 45°,\ 135° \leqq \theta < 360°$

(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0$ から　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を求めると　$\theta = 135°,\ 225°$

ゆえに　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　を満たす範囲は　$0° \leqq \theta < 135°,\ 225° < \theta < 360°$

(3)　$\tan\theta + \sqrt{3} \geqq 0$ から　$\tan\theta \geqq -\sqrt{3}$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ を求めると　$\theta = 120°,\ 300°$

$\tan\theta \geqq -\sqrt{3}$ を満たす範囲は　$0° \leqq \theta < 90°,\ 120° \leqq \theta < 270°,\ 300° \leqq \theta < 360°$

9．$0° \leqq \theta \leqq 180°$，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

解答　(1)　$-\dfrac{3}{8}$　　(2)　$\dfrac{11}{16}$

解説

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

ゆえに　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{8}$

(2)　(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

別解　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

ゆえに，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ と (1) の $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{8}$ から

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

10. 次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin(90° - \theta) - \cos(90° - \theta) + \sin(180° - \theta) + \cos(180° - \theta)$

(2)　$\sin(90° + \theta)\sin(90° - \theta) - \cos(90° + \theta)\cos(90° - \theta)$

解答　(1)　0　　(2)　1

解説

(1)　(与式)$= \cos\theta - \sin\theta + \sin\theta - \cos\theta = 0$

(2)　$\sin(90° + \theta) = \sin\{180° - (90° - \theta)\} = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° + \theta) = \cos\{180° - (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$

よって　(与式)$= \cos\theta \cdot \cos\theta - (-\sin\theta)\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

11. $0° \leqq \theta \leqq 180°$において，次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta + 2$　　(2)　$-3\cos\theta + 1$

解答　(1)　$2 \leqq \sin\theta + 2 \leqq 3$　　(2)　$-2 \leqq -3\cos\theta + 1 \leqq 4$

解説

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき　$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$

各辺に 2 を加えて　$2 \leqq \sin\theta + 2 \leqq 3$

(2)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

各辺に -3 をかけて　$-3 \leqq -3\cos\theta \leqq 3$

各辺に 1 を加えて　$-2 \leqq -3\cos\theta + 1 \leqq 4$

12. θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で動くとき，$y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。
また，そのときの θ も求めよ。

解答　$\theta = 120°$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，$\theta = 0°$ のとき最小値 -1

解説

$\cos\theta = t$ とおくと

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ から

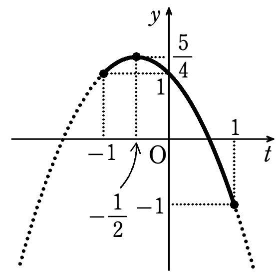
$-1 \leqq t \leqq 1$ …… ①

また　$y = \sin^2\theta - \cos\theta$

$= (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta$

$= -\cos^2\theta - \cos\theta + 1$

$= -t^2 - t + 1$



よって平方完成して　$y = -\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$

① から y は $t = -\dfrac{1}{2}$ で　最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

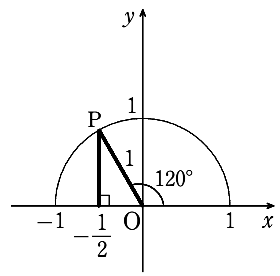
このとき $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たすθは

$0° \leqq \theta \leqq 180°$　より　$\theta = 120°$

また，① から y は $t = 1$ で　最小値 -1 をとる。

このとき　$\cos\theta = 1$ 満たすθは

$0° \leqq \theta \leqq 180°$　より　$\theta = 0°$



以上から　$\theta = 120°$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$\theta = 0°$ のとき最小値 -1