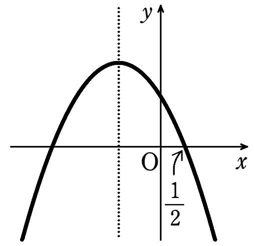
確認テスト（２次関数）Ｈ２２．７．５　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　　)

1．2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数の解をもたない満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

2．すべての実数 x に対して，不等式 $x^2+ax+a+3>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

3．次の図は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。a，b，c，$a+b+c$ および b^2-4ac の符号をいえ。



4．2 次不等式 $ax^2+bx+4<0$ の解が $x<-1$，$2<x$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

5．関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

6．ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

7．放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

8．放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

9．関数 $f(x)=|x^2-x-2|-2x$ について

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$-1\leqq x\leqq 3$ における最大値および最小値とそのときの x の値を求めよ。

10．x が $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき

$$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

確認テスト（２次関数）Ｈ２２．７．５　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数の解をもたない満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

解説

この方程式が実数の解をもたないための条件は，係数について

$(m-1)^2-4\cdot1\cdot(2m-1)<0$　　すなわち　　$m^2-10m+5<0$

$m^2-10m+5=0$ を解くと　　$m=5\pm2\sqrt{5}$

よって，求める m の値の範囲は　　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

2．すべての実数 x に対して，不等式 $x^2+ax+a+3>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-2<a<6$

解説

x^2 の係数は正であるから，常に不等式が成り立つ条件は

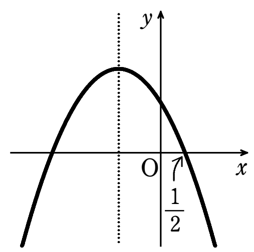
$D=a^2-4(a+3)<0$

すなわち　　$a^2-4a-12<0$

よって　　$(a+2)(a-6)<0$

ゆえに　　$-2<a<6$

3．次の図は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。a，b，c，$a+b+c$ および b^2-4ac の符号をいえ。



解答　$a<0$，$b<0$，$c>0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac>0$

解説

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　y 軸との交点の座標は　$(0,\ c)$

また，$x=1$ のとき　　$y=a+b+c$

グラフは上に凸であるから　$a<0$

軸は $x<0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}<0$　　ここで $a<0$ であるから　$b<0$

y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

$x=1$ のとき $y<0$ であるから　　$a+b+c<0$

グラフは x 軸と異なる 2 点で交わるから　　$b^2-4ac>0$

4．2 次不等式 $ax^2+bx+4<0$ の解が $x<-1$，$2<x$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-2$，$b=2$

解説

条件から，$y=ax^2+bx+4$ のグラフが，$x<-1$，$2<x$ の範囲で x 軸より下方にあればよい。

すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通ればよいから

$a<0$，　$0=a-b+4$，　$0=4a+2b+4$

第 2 式と第 3 式から　　$a=-2$，$b=2$

これは $a<0$ を満たす。　　　　答　$a=-2$，$b=2$

5．関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0\leqq x\leqq2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

$y=x^2-2ax-a$

$=(x-a)^2-a^2-a$ $(0\leqq x\leqq2)$

軸の方程式は $x=a$

[1]　$a\leqq0$ のとき

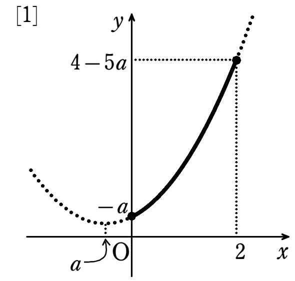
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

条件から　　$-a=-2$

よって　　$a=2$

これは $a\leqq0$ を満たさない。



[2]　$0<a<2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-a^2-a$ をとる。

条件から　$-a^2-a=-2$

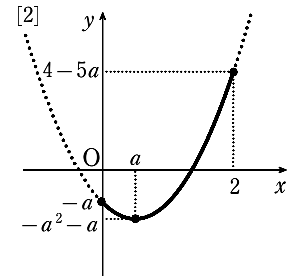
$a^2+a-2=0$

$(a-1)(a+2)=0$

よって　　$a=1$，-2

このうち，$0<a<2$ を満たすものは

$a=1$



[3]　$2\leqq a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

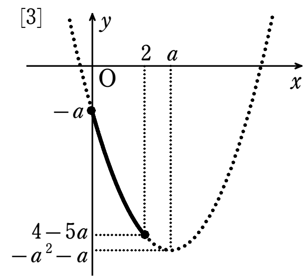
よって，$x=2$ で最小値 $4-5a$ をとる。

条件から　$4-5a=-2$

よって　　$a=\dfrac{6}{5}$

これは $2\leqq a$ を満たさない。

以上から　　$a=1$



6．ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x^2+4x-2$

解説

求める放物線は，放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると

$-y=x^2-2x+2$　　すなわち　　$y=-x^2+2x-2$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$y-3=-(x-1)^2+2(x-1)-2$

よって　　$y=-x^2+4x-2$

7．放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$y=2(x-p)^2+2p-3$ ……①

とおける。これが点 $(1,\ 3)$ を通るから

$3=2(1-p)^2+2p-3$

整理して　$p^2-p-2=0$

よって　$(p+1)(p-2)=0$　　ゆえに　$p=-1,\ 2$

① に代入して　$y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$

8．放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x^2-3x+1$

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は $y=2x^2+bx+c$ とおける。

これが 2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通るから

$6=2-b+c$，　$3=8+2b+c$

これを解いて　$b=-3$，$c=1$

よって　$y=2x^2-3x+1$

9．関数 $f(x)=|x^2-x-2|-2x$ について

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

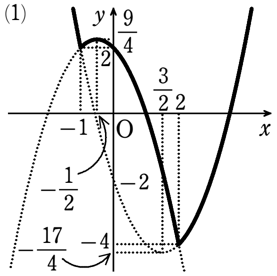
(2)　$-1\leqq x\leqq 3$ における最大値および最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答　(1)　〔図〕

(2)　最大値　$\dfrac{9}{4}\ \left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$

最小値　$-4\ (x=2)$

(1)



解説

(1)　$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x^2-x-2\geqq 0$　つまり　$x\leqq -1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$ である。よって

$y=(x^2-x-2)-2x$

$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}$

$x^2-x-2<0$　つまり　$-1<x<2$ のとき

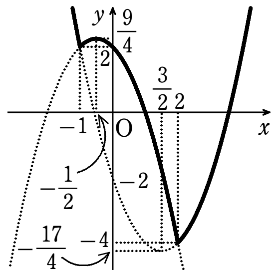
$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$ である。よって

$y=-(x^2-x-2)-2x$

$=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

$x=-1$ のとき $y=2$,

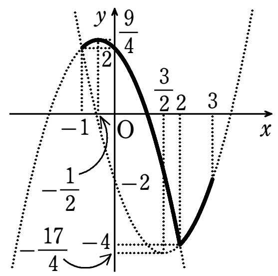
$x=2$ のとき $y=-4$ で，グラフは右上の図の実線部分のようになる。



(2)　(1)のグラフにおいて $-1\leqq x\leqq 3$ の部分を考える。すると

$x=-\dfrac{1}{2}$　のとき　最大値　$\dfrac{9}{4}$

$x=2$　のとき　最小値　-4



10．x が $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき

$$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=-1$ のとき 最大値 1，$x=-1+\sqrt{3}$ のとき 最小値 -8

解説

$x^2+2x=t$ とおくと

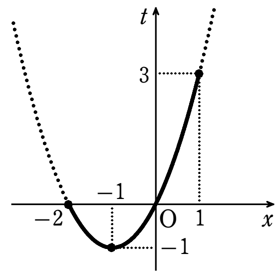
$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$

$=\{(x^2+2x)+3\}\{(x^2+2x)-2\}-5(x^2+2x)+2$

$=(t+3)(t-2)-5t+2=t^2-4t-4$

$=(t-2)^2-8$

すなわち　$y=(t-2)^2-8$ ……①



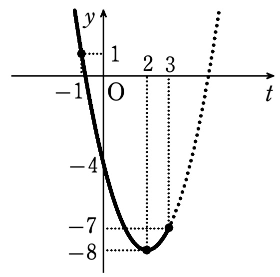
また，$-2\leqq x\leqq 1$ のとき　$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

ゆえに，t の値域は　$-1\leqq t\leqq 3$ ……②

② の t の範囲で，t の関数 y は

$t=-1$ のとき 最大値 1,

$t=2$ のとき最小値 -8　をとる。



$t=-1$ のとき $x^2+2x=-1$ から　$(x+1)^2=0$

ゆえに $-2\leqq x\leqq 1$ から　$x=-1$

$t=2$ のとき $x^2+2x=2$，$-2\leqq x\leqq 1$ から

$x=-1+\sqrt{3}$

以上から　$x=-1$ のとき 最大値 1

$x=-1+\sqrt{3}$ のとき 最小値 -8