数学演習（２次関数）Ｈ１９．６．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1. 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が 1 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

2. 次の 2 次不等式を解け。

(1) $12x^2-5x-3>0$　　(2) $9x^2-6x-1<0$

(3) $x^2-x-6\geqq 0$　　(4) $-x^2+7x-10\geqq 0$

3. 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-8x+16>0$　　(2) $4x^2+4x+1<0$

(3) $x^2-5x+8\geqq 0$　　(4) $-3x^2+12x-13\geqq 0$

4. (1) 2 次方程式 $x^2+kx+k+8=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2) 方程式 $mx^2+(m-1)x+2=0$ が実数の解をもたないように，定数 m の値の範囲を定めよ。

5. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x^2+x-10\leqq 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-4x+1\geqq 0 \\ -x^2-x+12>0 \end{cases}$

6. 次の条件を満たす放物線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 放物線 $y=2x^2$ を平行移動した曲線で，2 点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通る。

(2) 放物線 $y=-x^2+2x+1$ を平行移動した曲線で，原点を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。

7. 定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

8. a を定数とするとき $0 \leqq x \leqq 2$ における関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1)　最大値を求めよ。　(2)　最小値を求めよ。

9. $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

10. m は定数とする。放物線 $y=x^2-4x+3$ が直線 $y=2x+m$ に接するとき，m の値と接点の座標を求めよ。

11. 次の条件を満たすような定数 m の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2-mx+m+2$ のグラフが常に x 軸より上側にある。

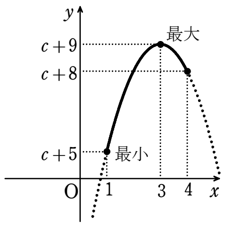
(2)　2 次関数 $y=mx^2+4x-2$ のグラフが常に x 軸より下側にある。

12. $a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の最小値を求めよ。

数学演習（２次関数）Ｈ１９．６．２８解答　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1. 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が 1 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

解説



与えられた関数の式は

$y=-(x-3)^2+c+9$ $(1\leqq x\leqq 4)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=3$ で 最大値 $c+9$

$x=1$ で 最小値 $c+5$

をとる。

ゆえに　　$c+5=1$

したがって　　$c=-4$

また，$x=3$ で最大値 $c+9=5$ をとる。

2. 次の 2 次不等式を解け。

(1) $12x^2-5x-3>0$　　(2) $9x^2-6x-1<0$

(3) $x^2-x-6\geqq 0$　　(4) $-x^2+7x-10\geqq 0$

解説

(1) 左辺を因数分解すると　　$(3x+1)(4x-3)>0$

2 次方程式 $(3x+1)(4x-3)=0$ を解くと　　$x=-\frac{1}{3},\ \frac{3}{4}$

ゆえに，この 2 次不等式の解は　　$x<-\frac{1}{3},\ \frac{3}{4}<x$

(2) 2 次方程式 $9x^2-6x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-9\cdot(-1)}}{9}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに，この 2 次不等式の解は

$$\frac{1-\sqrt{2}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

(3) 左辺を因数分解すると　　$(x+2)(x-3)\geqq 0$

ゆえに　　$x\leqq -2,\ 3\leqq x$

(4) 両辺に -1 を掛けると　　$x^2-7x+10\leqq 0$

左辺を因数分解すると　　$(x-2)(x-5)\leqq 0$

ゆえに　　$2\leqq x\leqq 5$

3. 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-8x+16>0$　　(2) $4x^2+4x+1<0$

(3) $x^2-5x+8\geqq 0$　　(4) $-3x^2+12x-13\geqq 0$

解説

(1) 左辺を因数分解して　　$(x-4)^2>0$

$x-4\neq 0$ ならば，$(x-4)^2>0$ が成り立つ。

ゆえに，求める解は　4 以外のすべての実数

(2) 左辺を因数分解して　　$(2x+1)^2<0$

$(2x+1)^2\geqq 0$ であるから，上の不等式を満たす x はない。

ゆえに，解は　ない

(3) x^2 の係数は 1 で正である。

また，2 次方程式 $x^2-5x+8=0$ において

$D=(-5)^2-4\cdot 8=-7<0$

ゆえに，すべての実数 x について $x^2-5x+8>0$ が成り立つから，求める解は

すべての実数

(4) 与式の両辺に -1 を掛けると　　$3x^2-12x+13\leqq 0$

2 次方程式 $3x^2-12x+13=0$ において

$D/4=(-6)^2-3\cdot 13=-3<0$

ゆえに，すべての実数 x について $3x^2-12x+13>0$ が成り立つ。

よって，解は　ない

4. (1) 2 次方程式 $x^2+kx+k+8=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2) 方程式 $mx^2+(m-1)x+2=0$ が実数の解をもたないように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解説

(1) 2 次方程式 $x^2+kx+k+8=0$ について

$D=k^2-4(k+8)=k^2-4k-32=(k+4)(k-8)$

この 2 次方程式が異なる 2 つの実数の解をもつ条件は　　$D>0$

ゆえに　　$(k+4)(k-8)>0$　　よって　　$k<-4,\ 8<k$

(2) $m=0$ のとき

方程式は $-x+2=0$ で，解 $x=2$ をもつから，適さない。

$m\neq 0$ のとき

2 次方程式 $mx^2+(m-1)x+2=0$ について

$D=(m-1)^2-4m\cdot 2=m^2-10m+1$

この 2 次方程式が実数の解をもたない条件は

$D<0$

よって　　$m^2-10m+1<0$　……①

$m^2-10m+1=0$ の解は

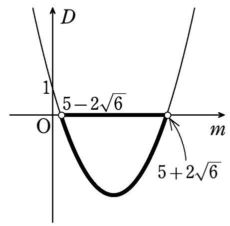
$m=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\cdot 1}$

$=5\pm 2\sqrt{6}$

ゆえに，① の解は　　$5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$

$5-2\sqrt{6}>0$ であるから，$m\neq 0$ を満たす。

以上から　　$5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$



5. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases}3x+1>0\\3x^2+x-10\leqq 0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2-4x+1\geqq 0\\-x^2-x+12>0\end{cases}$

解説

(1) $3x+1>0$ を解いて　　$x>-\frac{1}{3}$　……①

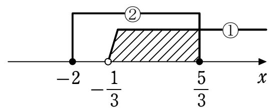
$3x^2+x-10\leqq 0$ の左辺を因数分解すると

$(x+2)(3x-5)\leqq 0$

ゆえに　　$-2\leqq x\leqq \frac{5}{3}$　……②

①，② の共通範囲を求めると

$-\frac{1}{3}<x\leqq\frac{5}{3}$



(2) $x^2-4x+1=0$ を解くと　　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって，$x^2-4x+1\geqq 0$ の解は

$x\leqq 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\leqq x$　……①

$-x^2-x+12>0$ の両辺に -1 を掛けて

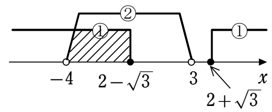
$x^2+x-12<0$

ゆえに　　$(x-3)(x+4)<0$

よって　　$-4<x<3$　……②

①，② の共通範囲を求めると

$-4<x\leqq 2-\sqrt{3}$



6. 次の条件を満たす放物線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 放物線 $y=2x^2$ を平行移動した曲線で，2 点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通る。

(2) 放物線 $y=-x^2+2x+1$ を平行移動した曲線で，原点を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。

解説

(1) 求める放物線の方程式を $y=2x^2+ax+b$ とする。

放物線が 2 点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$-1=2\cdot 1^2+a\cdot 1+b$　すなわち　$a+b=-3$

$0=2\cdot 2^2+a\cdot 2+b$　すなわち　$2a+b=-8$

これを解いて　　$a=-5,\ b=2$

ゆえに，求める方程式は　　$y=2x^2-5x+2$

(2) 求める放物線の頂点を点 $(p,\ q)$ とする。

これが直線 $y=2x-1$ 上にあるから　　$q=2p-1$

よって，求める方程式は

$y=-(x-p)^2+2p-1$ ……①

と表される。

放物線が点 $(0,\ 0)$ を通るから

$0=-(0-p)^2+2p-1$　すなわち　$p^2-2p+1=0$

ゆえに　　$(p-1)^2=0$　　よって　　$p=1$

このとき，① は　　$y=-(x-1)^2+1$

ゆえに，求める方程式は　　$y=-x^2+2x$

7. 定義域を $1\leqq x\leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解説

$f(x)=a(x^2-4x)+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

$1<2<4$ であり　$f(1)=-3a+b$，$f(2)=-4a+b$，

$f(4)=b$

[1] $a=0$ のとき

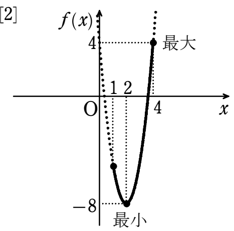
$f(x)=b$ (定数) となり，最大値 4，最小値 -8 となることはない。

[2] $a>0$ のとき

$x=4$ で最大値 b

$x=2$ で最小値 $-4a+b$ をとる。

[2]



ゆえに　$b=4$，$-4a+b=-8$

これを解いて　$a=3$，$b=4$

これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

$x=2$ で最大値 $-4a+b$

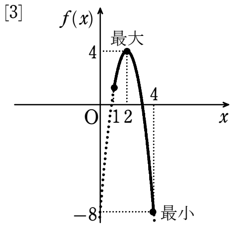
$x=4$ で最小値 b　をとる。

ゆえに　$-4a+b=4$，$b=-8$

これを解いて　$a=-3$，$b=-8$

これは $a<0$ を満たす。

よって　$a=3$，$b=4$　または　$a=-3$，$b=-8$



8. a を定数とするとき $0\leqq x\leqq 2$ における関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

解説

$$y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

ゆえに，この関数のグラフは頂点が点 $(a,\ a^2)$，軸が直線 $x=a$ で，下に凸の放物線の一部である。

$x=0$ のとき　$y=2a^2$

$x=2$ のとき　$y=2a^2-4a+4$

$x=a$ のとき　$y=a^2$

定義域の中央は $x=1$ であるから，図より

(1)　$a<1$ のとき　$x=2$　で 最大値 $2a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　$x=0$，2 で 最大値 2

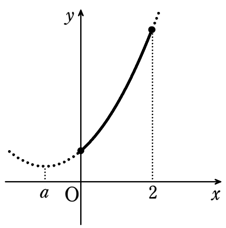
$1<a$ のとき　$x=0$　で 最大値 $2a^2$

(2)　$a<0$ のとき　$x=0$ で 最小値 $2a^2$

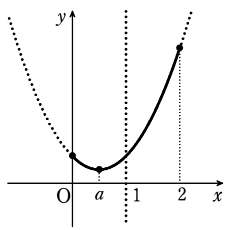
$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で 最小値 a^2

$2<a$ のとき　$x=2$ で 最小値 $2a^2-4a+4$

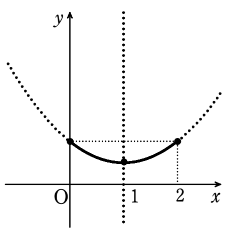
$a<0$ のとき



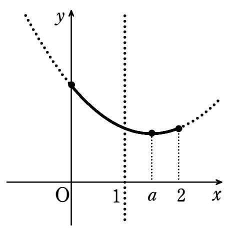
$0\leqq a<1$ のとき



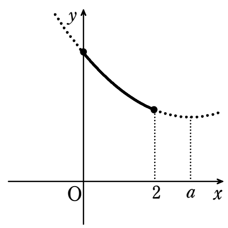
$a=1$ のとき



$1<a\leqq 2$ のとき



$2<a$ のとき



9. $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解説

$x+y=4$ から　$y=4-x$　……①

$y\geqq 0$ から　$4-x\geqq 0$　　よって　$x\leqq 4$

$x\geqq 0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq 4$　……②

また　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2$

$=2x^2-8x+16$

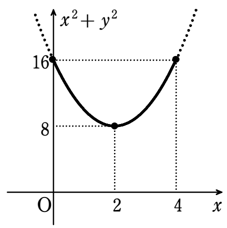
$=2(x-2)^2+8$

よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は

$x=0$　または $x=4$ で最大値 16，

$x=2$ で最小値 8

をとる。



ここで，① から

$x=0$ のとき $y=4$，

$x=4$ のとき $y=0$，

$x=2$ のとき $y=2$

以上から，x のとりうる値の範囲は $0\leqq x\leqq 4$ であり，x^2+y^2 は

$x=0$，$y=4$　または　$x=4$，$y=0$ で最大値 16，

$x=y=2$ で最小値 8

をとる。

10. m は定数とする。放物線 $y=x^2-4x+3$ が直線 $y=2x+m$ に接するとき，m の値と接点の座標を求めよ。

解説

$y=x^2-4x+3$　……①，　$y=2x+m$　……②　とする。

①，② から y を消去すると　$x^2-4x+3=2x+m$

よって　$x^2-6x+3-m=0$　……③

ここで，③ について

$$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(3-m)=4(m+6)$$

① と ② が接するのは $D=0$　すなわち　$m=-6$ のときである。

③ で $m=-6$ とすると

$x^2-6x+9=0$　　ゆえに　$x=3$

このとき，② から　$y=2\cdot 3-6=0$

よって　$m=-6$，接点の座標は $(3,\ 0)$

11. 次の条件を満たすような定数 m の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2-mx+m+2$ のグラフが常に x 軸より上側にある。

(2)　2 次関数 $y=mx^2+4x-2$ のグラフが常に x 軸より下側にある。

解説

(1)　x^2 の係数は正であるから，グラフは下に凸の放物線である。

このグラフが常に x 軸より上側にある条件は，係数について

$(-m)^2-4(m+2)<0$　　整理すると　$m^2-4m-8<0$

$m^2-4m-8=0$ を解くと

$$m=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-8)}=2\pm 2\sqrt{3}$$

よって，求める m の値の範囲は　$2-2\sqrt{3}<m<2+2\sqrt{3}$　答

(2)　この関数のグラフが常に x 軸より下側にある条件は，グラフが上に凸の放物線で，かつ，x 軸と共有点をもたないことである。

よって　$m<0$　……①　かつ

係数について　$4^2-4m\cdot(-2)<0$

整理すると　$8m+16<0$　　これを解いて　$m<-2$　……②

① と ② の共通範囲をとって　$m<-2$　答

12. $a\leqq x\leqq a+2$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の最小値を求めよ。

解説

$$f(x)=x^2-2x+2=(x^2-2x+1^2)-1^2+2$$
$$=(x-1)^2+1$$

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，その頂点は点 $(1,\ 1)$，軸は直線 $x=1$ である。

[1]　$a+2<1$　すなわち　$a<-1$ のとき

グラフの頂点は定義域の右外にあり

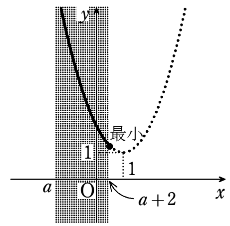
$f(a)>f(a+2)$

したがって，$x=a+2$ のとき最小値をとる。その値は

$f(a+2)=(a+2-1)^2+1$

$=(a+1)^2+1$

$=a^2+2a+2$

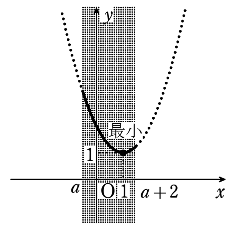


[2]　$a\leqq 1$　かつ　$1\leqq a+2$

すなわち　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

グラフの頂点は定義域の内部にある。

したがって，$x=1$ のとき最小値 1 をとる。



[3]　$1<a$ のとき

グラフの頂点は定義域の左外にあり

$f(a)<f(a+2)$

したがって，$x=a$ のとき最小値をとる。その値は

$f(a)=a^2-2a+2$