

- 1 次の2次不等式を解け。
- (1) $(x+1)(x-2)>0$

(2) $(x+1)(x-2)<0$

(3) $x^2-3x-10\leq 0$

- 2 次の2次不等式を解け。
- (1) $(x+2)(x+3)<0$

(2) $(2x+1)(3x-5)>0$

(3) $x^2-2x<0$

(4) $x^2+6x+8\geq 0$

(5) $x^2>9$

(6) $x^2+x\leq 6$

- 3 次の2次不等式を解け。
- (1) $2x^2-5x+2<0$

(2) $-4x^2+4x+1\leq 0$

- 4 次の2次不等式を解け。
- (1) $3x^2+10x-8>0$

(2) $6x^2+x-12\leq 0$

(3) $5x^2+6x-1\geq 0$

(4) $2(x+2)(x-2)\leq (x+1)^2$

(5) $-x^2+3x+2>0$

- 5 次の2次不等式を解け。
- (1) $x^2-8x+16>0$

(2) $x^2-8x+16<0$

(3) $x^2-8x+16\geq 0$

(4) $x^2-8x+16\leq 0$

- 6 次の2次不等式を解け。
- (1) $x^2+2x+1>0$

(2) $x^2+4x+4\geq 0$

(3) $\frac{1}{4}x^2-x+1<0$

(4) $-9x^2+12x-4\geq 0$

7 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2+4x+6>0$

(3) $x^2+4x+6\geq 0$

(2) $x^2+4x+6<0$

(4) $x^2+4x+6\leq 0$

8 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-4x+5<0$

(3) $3x^2-6x+6\leq 0$

(2) $2x^2-8x+13>0$

(4) $x^2+3\geq 0$

9 2次方程式 $x^2+2mx-m+2=0$ の解が次のようなとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの実数解をもつ。

(2) 実数解をもつ。

(3) 実数解をもたない。

10 2次方程式 $x^2+mx+9=0$ の解が次のようなとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの実数解をもつ。

(2) 実数解をもつ。

(3) 実数解をもたない。

11 2次不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-\frac{1}{2}<x<4$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ。

12 次の条件を満たすように，定数 a, b の値を定めよ。

(1) 2次不等式 $x^2+ax+b<0$ の解が $-\frac{1}{2}<x<3$ である。

(2) 2次不等式 $ax^2+x+b\leq 0$ の解が $x\leq -1, 2\leq x$ である。

1 次の2次不等式を解け。

- (1) $(x+1)(x-2)>0$ (2) $(x+1)(x-2)<0$ (3) $x^2-3x-10\leq 0$

解答 (1) $x<-1, 2<x$ (2) $-1<x<2$ (3) $-2\leq x\leq 5$

解説

- (1) $(x+1)(x-2)=0$ を解くと
 $x=-1, 2$

$y=(x+1)(x-2)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

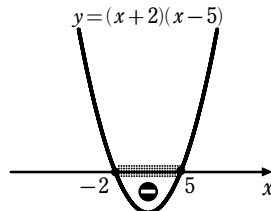
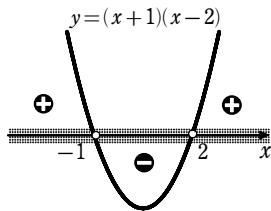
$$x<-1, 2<x$$

- (2) (1)のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて
 $-1<x<2$

- (3) 左辺を因数分解して $(x+2)(x-5)\leq 0$

$(x+2)(x-5)=0$ を解くと
 $x=-2, 5$

$y=(x+2)(x-5)$ のグラフで $y\leq 0$ となる x の値の範囲を求めて
 $-2\leq x\leq 5$



2 次の2次不等式を解け。

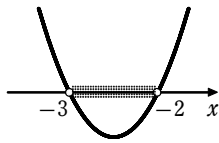
- (1) $(x+2)(x+3)<0$ (2) $(2x+1)(3x-5)>0$ (3) $x^2-2x<0$
(4) $x^2+6x+8\geq 0$ (5) $x^2>9$ (6) $x^2+x\leq 6$

解答 (1) $-3<x<-2$ (2) $x<-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}<x$ (3) $0<x<2$
(4) $x\leq -4, -2\leq x$ (5) $x<-3, 3<x$ (6) $-3\leq x\leq 2$

解説

- (1) $(x+2)(x+3)=0$ を解くと
 $x=-2, -3$

$y=(x+2)(x+3)$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて
 $-3<x<-2$

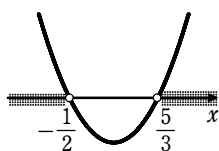


- (2) $(2x+1)(3x-5)=0$ を解くと

$$x=-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}$$

$y=(2x+1)(3x-5)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

$$x<-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}<x$$

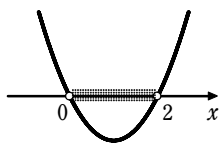


- (3) 左辺を因数分解して

$$x(x-2)<0$$

$x(x-2)=0$ を解くと
 $x=0, 2$

$y=x(x-2)$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて
 $0<x<2$



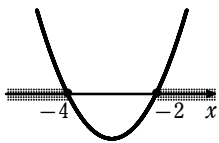
- (4) 左辺を因数分解して

$$(x+4)(x+2)\geq 0$$

$(x+4)(x+2)=0$ を解くと
 $x=-4, -2$

$y=(x+4)(x+2)$ のグラフで $y\geq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$x\leq -4, -2\leq x$$



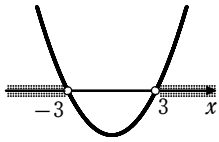
- (5) 移項して $x^2-9>0$

左辺を因数分解して

$$(x+3)(x-3)>0$$

$(x+3)(x-3)=0$ を解くと $x=\pm 3$

$y=(x+3)(x-3)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて
 $x<-3, 3<x$



- (6) 移項して $x^2+x-6\leq 0$

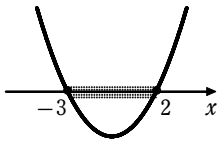
左辺を因数分解して

$$(x+3)(x-2)\leq 0$$

$(x+3)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-3, 2$$

$y=(x+3)(x-2)$ のグラフで $y\leq 0$ となる x の値の範囲を求めて
 $-3\leq x\leq 2$



3 次の2次不等式を解け。

- (1) $2x^2-5x+2<0$ (2) $-4x^2+4x+1\leq 0$

解答 (1) $\frac{1}{2}<x<2$ (2) $x\leq \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\leq x$

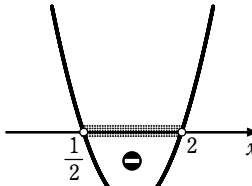
解説

- (1) $2x^2-5x+2=0$ を解くと

左辺を因数分解して $(2x-1)(x-2)=0$

したがって $x=\frac{1}{2}, 2$

よって、不等式の解は $\frac{1}{2}<x<2$



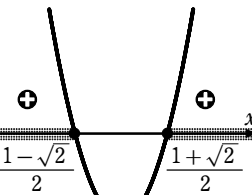
- (2) 両辺に -1 を掛けて $4x^2-4x-1\geq 0$

$4x^2-4x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)}}{4}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

よって、不等式の解は $x\leq \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\leq x$



4 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2+10x-8>0$ (2) $6x^2+x-12\leq 0$ (3) $5x^2+6x-1\geq 0$
(4) $2(x+2)(x-2)\leq (x+1)^2$ (5) $-x^2+3x+2>0$

解答 (1) $x<-4, \frac{2}{3}<x$ (2) $-\frac{3}{2}\leq x\leq \frac{4}{3}$

(3) $x\leq \frac{-3-\sqrt{14}}{5}, \frac{-3+\sqrt{14}}{5}\leq x$ (4) $1-\sqrt{10}\leq x\leq 1+\sqrt{10}$

(5) $\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

解説

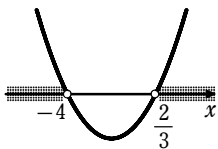
- (1) $3x^2+10x-8=0$ を解くと

左辺を因数分解して

$$(x+4)(3x-2)=0$$

したがって $x=-4, \frac{2}{3}$

よって、不等式の解は $x<-4, \frac{2}{3}<x$



- (2) $6x^2+x-12=0$ を解くと

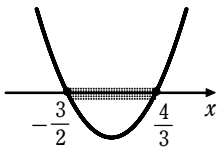
左辺を因数分解して

$$(2x+3)(3x-4)=0$$

したがって $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

よって、不等式の解は

$$-\frac{3}{2}\leq x\leq \frac{4}{3}$$



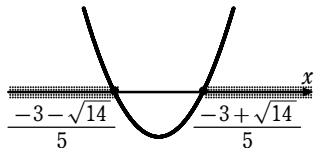
- (3) $5x^2+6x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot(-1)}}{5}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{14}}{5}$$

よって、不等式の解は

$$x\leq \frac{-3-\sqrt{14}}{5}, \frac{-3+\sqrt{14}}{5}\leq x$$



- (4) 両辺を展開して $2x^2-8\leq x^2+2x+1$

整理すると $x^2-2x-9\leq 0$

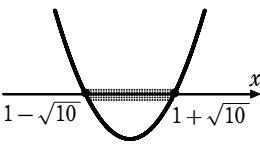
$x^2-2x-9=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-9)}}{1}$$

$$=1\pm\sqrt{10}$$

よって、不等式の解は

$$1-\sqrt{10}\leq x\leq 1+\sqrt{10}$$



- (5) 両辺に -1 を掛けて $x^2-3x-2<0$

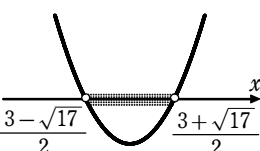
$x^2-3x-2=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

よって、不等式の解は

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$$



5 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2-8x+16>0$ (2) $x^2-8x+16<0$
(3) $x^2-8x+16\geq 0$ (4) $x^2-8x+16\leq 0$

解答 (1) 4以外のすべての実数 (2) 解はない (3) すべての実数 (4) $x=4$

解説

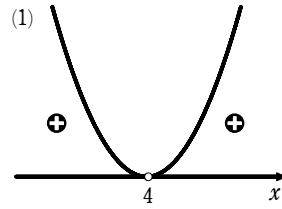
2次方程式 $x^2 - 8x + 16 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

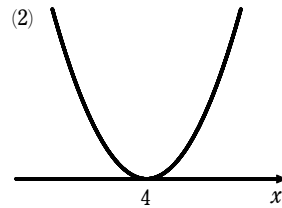
よって、 $y = x^2 - 8x + 16$ のグラフは x 軸に接する。

$x^2 - 8x + 16 = 0$ を解くと、 $(x - 4)^2 = 0$ から $x = 4$

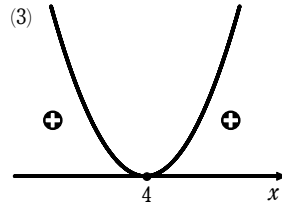
- (1) $y = (x - 4)^2$ のグラフで、 $y > 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は 4 以外のすべての実数



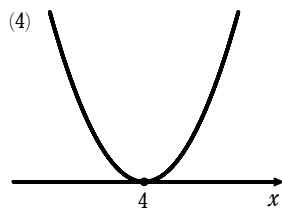
- (2) $y = (x - 4)^2$ のグラフで、 $y < 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない



- (3) $y = (x - 4)^2$ のグラフで、 $y \geq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



- (4) $y = (x - 4)^2$ のグラフで、 $y \leq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は $x = 4$



6 次の2次不等式を解け。

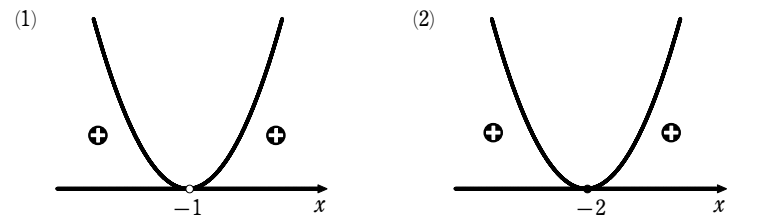
- (1) $x^2 + 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$
(3) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 < 0$ (4) $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0$

解答 (1) -1 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない
(4) $x = \frac{2}{3}$

解説

- (1) 2次方程式 $x^2 + 2x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
よって、 $y = x^2 + 2x + 1$ のグラフは x 軸に接する。
 $x^2 + 2x + 1 = 0$ を解くと、 $(x + 1)^2 = 0$ から $x = -1$
 $y = (x + 1)^2$ のグラフで $y > 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は -1 以外のすべての実数

- (2) 2次方程式 $x^2 + 4x + 4 = 0$ の判別式を D とすると $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$
よって、 $y = x^2 + 4x + 4$ のグラフは x 軸に接する。
 $x^2 + 4x + 4 = 0$ を解くと、 $(x + 2)^2 = 0$ から $x = -2$
 $y = (x + 2)^2$ のグラフで $y \geq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



- (3) 2次方程式 $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$
よって、 $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ のグラフは x 軸に接する。

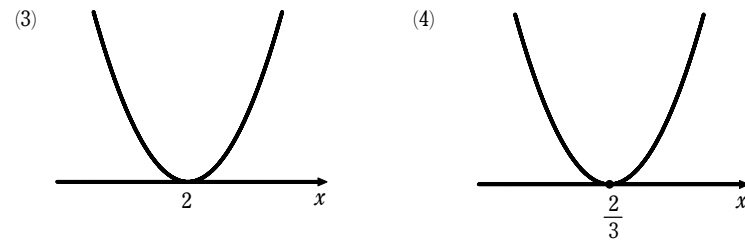
$$\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \text{ を解くと、} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = 0 \text{ から } x = 2$$

$y = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ のグラフで $y < 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない

- (4) 不等式の両辺を (-1) 倍して $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$
2次方程式 $9x^2 - 12x + 4 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$
よって、 $y = 9x^2 - 12x + 4$ のグラフは x 軸に接する。

$$9x^2 - 12x + 4 = 0 \text{ を解くと、} (3x - 2)^2 = 0 \text{ から } x = \frac{2}{3}$$

$y = (3x - 2)^2$ のグラフで $y \leq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は $x = \frac{2}{3}$



7 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2 + 4x + 6 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 6 < 0$
(3) $x^2 + 4x + 6 \geq 0$ (4) $x^2 + 4x + 6 \leq 0$

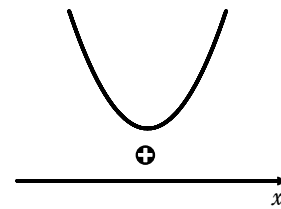
解答 (1) すべての実数 (2) 解はない (3) すべての実数 (4) 解はない

解説

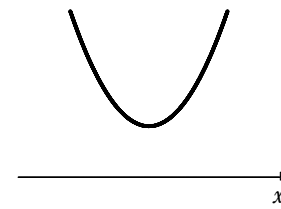
2次方程式 $x^2 + 4x + 6 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$

よって、 $y = x^2 + 4x + 6$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

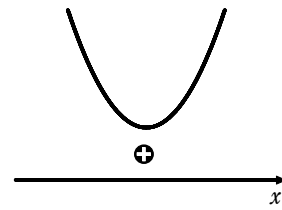
- (1) $y = x^2 + 4x + 6$ のグラフで $y > 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



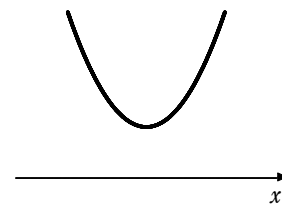
- (2) $y = x^2 + 4x + 6$ のグラフで $y < 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない



- (3) $y = x^2 + 4x + 6$ のグラフで $y \geq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



- (4) $y = x^2 + 4x + 6$ のグラフで $y \leq 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない



8 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2 - 4x + 5 < 0$ (2) $2x^2 - 8x + 13 > 0$
(3) $3x^2 - 6x + 6 \leq 0$ (4) $x^2 + 3 \geq 0$

解答 (1) 解はない (2) すべての実数 (3) 解はない (4) すべての実数

解説

- (1) 2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0$

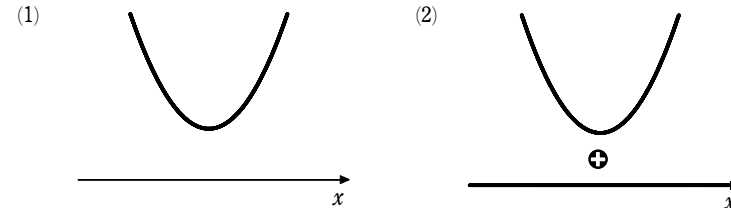
よって、 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$y = x^2 - 4x + 5$ のグラフで、 $y < 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない

- (2) 2次方程式 $2x^2 - 8x + 13 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 13 < 0$

よって、 $y = 2x^2 - 8x + 13$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$y = 2x^2 - 8x + 13$ のグラフで、 $y > 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



- (3) 不等式の両辺を 3 で割って $x^2 - 2x + 2 \leq 0$
2次方程式 $x^2 - 2x + 2 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$$

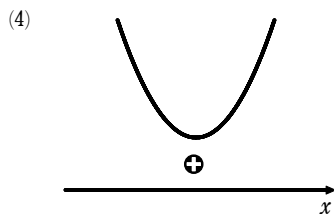
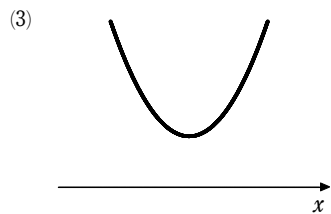
よって、 $y = x^2 - 2x + 2$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$y = x^2 - 2x + 2$ のグラフで、 $y \leq 0$ となる x の値の範囲を考えて 解はない

- (4) 2次方程式 $x^2 + 3 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$

よって、 $y = x^2 + 3$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$y = x^2 + 3$ のグラフで、 $y \geq 0$ となる x の値の範囲を求めて、解は すべての実数



9 2次方程式 $x^2 + 2mx - m + 2 = 0$ の解が次のようなとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる2つの実数解をもつ。 (2) 実数解をもつ。
(3) 実数解をもたない。

解答 (1) $m < -2, 1 < m$ (2) $m \leq -2, 1 \leq m$ (3) $-2 < m < 1$

解説

2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 2) = 4(m^2 + m - 2) = 4(m + 2)(m - 1)$$

- (1) 異なる2つの実数解をもつための条件は $D > 0$
ゆえに $(m + 2)(m - 1) > 0$ よって $m < -2, 1 < m$
(2) 実数解をもつための条件は $D \geq 0$
ゆえに $(m + 2)(m - 1) \geq 0$ よって $m \leq -2, 1 \leq m$
(3) 実数解をもたないための条件は $D < 0$
ゆえに $(m + 2)(m - 1) < 0$ よって $-2 < m < 1$

10 2次方程式 $x^2 + mx + 9 = 0$ の解が次のようなとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる2つの実数解をもつ。 (2) 実数解をもつ。
(3) 実数解をもたない。

解答 (1) $m < -6, 6 < m$ (2) $m \leq -6, 6 \leq m$ (3) $-6 < m < 6$

解説

与えられた2次方程式の判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = m^2 - 36 = (m + 6)(m - 6)$$

- (1) 異なる2つの実数解をもつための条件は $D > 0$
ゆえに $(m + 6)(m - 6) > 0$ よって $m < -6, 6 < m$
(2) 実数解をもつための条件は $D \geq 0$
ゆえに $(m + 6)(m - 6) \geq 0$ よって $m \leq -6, 6 \leq m$
(3) 実数解をもたないための条件は $D < 0$
ゆえに $(m + 6)(m - 6) < 0$ よって $-6 < m < 6$

11 2次不等式 $ax^2 + bx + 4 > 0$ の解が $-\frac{1}{2} < x < 4$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

解答 $a = -2, b = 7$

解説

題意を満たすための条件は、2次関数 $y = ax^2 + bx + 4$ のグラフが、 $-\frac{1}{2} < x < 4$ の範囲

でのみ x 軸より上側にあることである。

すなわち、このグラフが上に凸の放物線で、2点

$(-\frac{1}{2}, 0), (4, 0)$ を通ることである。したがって

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } a - 2b + 16 = 0 \quad \textcircled{3} \text{ から } 4a + b + 1 = 0$$

$$\text{この2式を連立して解くと } a = -2, b = 7$$

これは $\textcircled{1}$ を満たす。

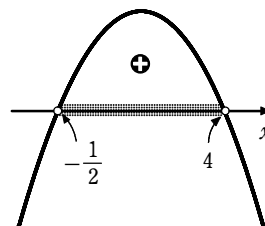
別解 解が $-\frac{1}{2} < x < 4$ となる2次不等式は $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) < 0$

$$\text{展開して } x^2 - \frac{7}{2}x - 2 < 0$$

定数項を4にするために、両辺に -2 を掛けて

$$-2x^2 + 7x + 4 > 0$$

$$ax^2 + bx + 4 > 0 \text{ と対応する係数を比較して } a = -2, b = 7$$



12 次の条件を満たすように、定数 a, b の値を定めよ。

- (1) 2次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ の解が $-\frac{1}{2} < x < 3$ である。
(2) 2次不等式 $ax^2 + x + b \leq 0$ の解が $x \leq -1, 2 \leq x$ である。

解答 (1) $a = -\frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2}$ (2) $a = -1, b = 2$

解説

(1) 題意を満たすための条件は、2次関数 $y = x^2 + ax + b$ の

グラフが、 $-\frac{1}{2} < x < 3$ の範囲でのみ x 軸より下側にある

ことである。すなわち、このグラフが下に凸の放物線で、

2点 $(-\frac{1}{2}, 0), (3, 0)$ を通ることである。

$$\text{よって } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0, 3^2 + a \cdot 3 + b = 0$$

$$\text{整理して } -2a + 4b + 1 = 0, 3a + b + 9 = 0$$

$$\text{この2式を連立して解くと } a = -\frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

別解 解が $-\frac{1}{2} < x < 3$ である2次不等式は

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) < 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 0$$

$$x^2 + ax + b < 0 \text{ と比較して } a = -\frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

(2) 題意を満たすための条件は、2次関数 $y = ax^2 + x + b$ の

グラフが、 $x < -1, 2 < x$ の範囲でのみ x 軸より下側にある

ことである。すなわち、このグラフが上に凸の放物線で、2点 $(-1, 0),$

$(2, 0)$ を通ることである。

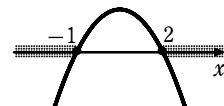
$$\text{したがって } a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a(-1)^2 + (-1) + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \cdot 2^2 + 2 + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } a + b - 1 = 0 \quad \textcircled{3} \text{ から } 4a + b + 2 = 0$$

$$\text{この2式を連立して解くと } a = -1, b = 2$$



これは $\textcircled{1}$ を満たす。

別解 解が $x \leq -1, 2 \leq x$ である2次不等式は $(x + 1)(x - 2) \geq 0$

$$\text{左辺を展開して } x^2 - x - 2 \geq 0 \quad \text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } -x^2 + x + 2 \leq 0$$

$$ax^2 + x + b \leq 0 \text{ と比較して } a = -1, b = 2$$