数学演習（２次不等式）Ｈ２３．７．５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の 2 次不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$　　(2)　$(x-a)(x-1)>0$

2．放物線 $y=x^2+2(a-2)x+a$ と次の部分が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分　　(2)　x 軸の負の部分

3．2 次方程式 $x^2-(m-4)x+m-1=0$ が，次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる 2 つの負の解をもつ。　　(2)　正の解と負の解を 1 つずつもつ。

4．$a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=-x^2+2x$ の最大値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a<-1$　　(2)　$-1 \leqq a \leqq 1$　　(3)　$1<a$

5．x，y は正の数とする。x，y が $x+y=6$ を満たしながら変化するとき，xy の最大値を求めよ。

6．$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，常に $x^2-2ax+3a>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

数学演習（２次不等式）Ｈ２３．７．５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1． 次の 2 次不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$　　　(2)　$(x-a)(x-1)>0$

解答　(1)　$a<x<a+1$

(2)　$a<1$ のとき　$x<a,\ 1<x$；　$a=1$ のとき　1 以外のすべての実数；
$1<a$ のとき　$x<1,\ a<x$

解説

(1)　$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$ から　　$(x-a)\{x-(a+1)\}<0$

よって　　$a<x<a+1$

(2)　a と 1 の大小で場合を分ける。

[1]　$a<1$ のとき　　$x<a,\ 1<x$

[2]　$a=1$ のとき　　不等式は $(x-1)^2>0$ となる。

よって，求める解は　　1 以外のすべての実数

[3]　$1<a$ のとき　　$x<1,\ a<x$

2． 放物線 $y=x^2+2(a-2)x+a$ と次の部分が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分　　　(2)　x 軸の負の部分

解答　(1)　$0<a<1$　　(2)　$a>4$

解説

$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$ とおく。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=-(a-2)$ である。

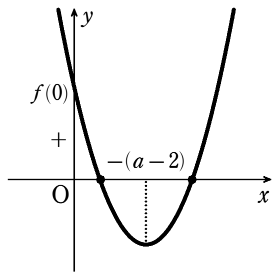
(1)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件は

$\{2(a-2)\}^2-4\cdot1\cdot a>0$　……①

$f(0)=a>0$　……②

軸について　$-(a-2)>0$　……③

の 3 つが同時に成り立つことである。



①から　$4(a^2-5a+4)>0$

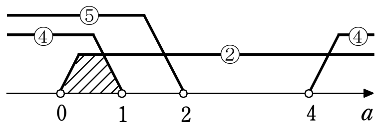
よって　$4(a-1)(a-4)>0$

ゆえに　$a<1,\ 4<a$　……④

③から　$a<2$　……⑤

②，④，⑤の共通範囲を求めて

$0<a<1$



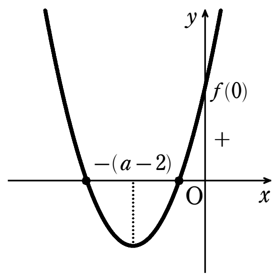
(2)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わるための条件は

$\{2(a-2)\}^2-4\cdot1\cdot a>0$　……①

$f(0)=a>0$　……②

軸について　$-(a-2)<0$　……③

の 3 つが同時に成り立つことである。

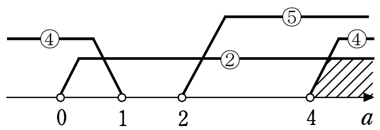


①から　$a<1,\ 4<a$　……④

③から　$a>2$　……⑤

②，④，⑤の共通範囲を求めて

$a>4$



3． 2 次方程式 $x^2-(m-4)x+m-1=0$ が，次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる 2 つの負の解をもつ。　　　(2)　正の解と負の解を 1 つずつもつ。

解答　(1)　$1<m<2$　　(2)　$m<1$

解説

$f(x)=x^2-(m-4)x+m-1$ とおく。

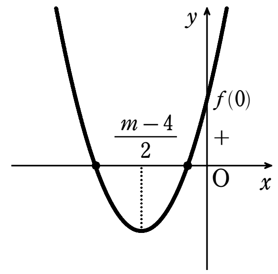
放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\dfrac{m-4}{2}$ である。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつことと，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることは同じである。そのための条件は，次の 3 つが同時に成り立つことである。

$\{-(m-4)\}^2-4\cdot1\cdot(m-1)>0$　……①

$f(0)=m-1>0$　……②

軸について　$\dfrac{m-4}{2}<0$　……③



①から　$m^2-12m+20>0$

ゆえに　$(m-2)(m-10)>0$

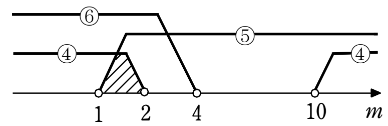
よって　$m<2,\ 10<m$　……④

②から　$m>1$　……⑤

③から　$m<4$　……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$1<m<2$

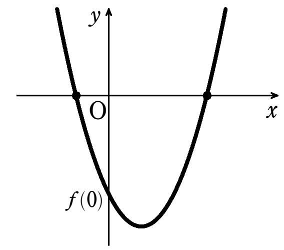


(2)　方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解を 1 つずつもつことは，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と負の部分で交わることと同じである。

そのための条件は，放物線が y 軸の負の部分と交わることである。

よって　$f(0)<0$　すなわち　$m-1<0$

したがって　　$m<1$



4．$a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=-x^2+2x$ の最大値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a<-1$　　　(2)　$-1 \leqq a \leqq 1$　　　(3)　$1<a$

解答　(1)　$x=a+2$ のとき最大値 $-a^2-2a$

(2)　$x=1$ のとき最大値 1

(3)　$x=a$ のとき最大値 $-a^2+2a$

解説

$$f(x)=-x^2+2x=-(x^2-2x+1^2-1^2)=-(x-1)^2+1$$

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸の放物線で，その頂点は点 $(1,\ 1)$，軸は直線 $x=1$ である。

また　$f(a)=-a^2+2a$，$f(a+2)=-(a+1)^2+1=-a^2-2a$

(1)　$a<-1$ のとき

グラフの頂点は定義域の右外にあって　$f(a)<f(a+2)$

よって，$x=a+2$ のとき最大値 $-a^2-2a$ をとる。 答

(2)　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

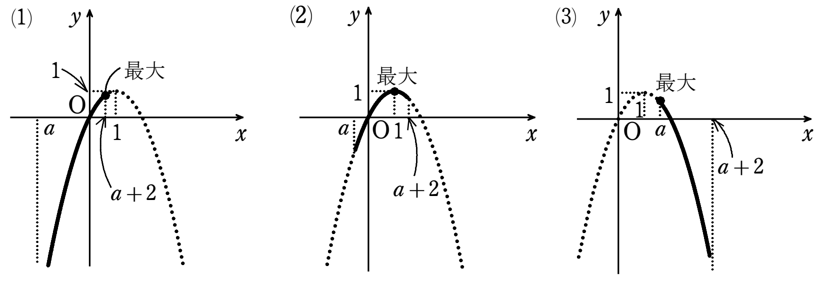
グラフの頂点は定義域の内部にある。

よって，$x=1$ のとき最大値 1 をとる。 答

(3)　$1<a$ のとき

グラフの頂点は定義域の左外にあって　$f(a)>f(a+2)$

よって，$x=a$ のとき最大値 $-a^2+2a$ をとる。 答



5．x，y は正の数とする。x，y が $x+y=6$ を満たしながら変化するとき，xy の最大値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9

解説

$x+y=6$ から　　$y=6-x$　　…… ①

また，$y>0$ であるから　$6-x>0$　　よって　$x<6$

$x>0$ との共通範囲は　　$0<x<6$　…… ②

① を xy に代入すると　　$xy=x(6-x)=-(x-3)^2+9$

② の範囲において，xy は　$x=3$ のとき最大値 9 をとる。

また，$x=3$ のとき，① から　　$y=6-3=3$

以上から　　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9　答

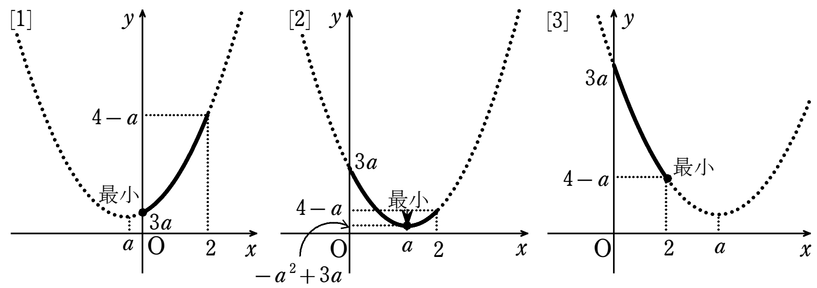
6．$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，常に $x^2-2ax+3a>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$0<a<4$

解説

$f(x)=x^2-2ax+3a$ とすると　　$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a$

$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，常に $f(x)>0$ が成り立つための条件は，この範囲における $f(x)$ の最小値が正であることである。



[1]　$a<0$ のとき　　$f(x)$ は $x=0$ で最小となる。

ゆえに　$f(0)=3a>0$　　これは，$a<0$ を満たさない。

[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　　$f(x)$ は $x=a$ で最小となる。

ゆえに　$f(a)=-a^2+3a>0$　　よって　$a^2-3a<0$

すなわち　$a(a-3)<0$　　　したがって　$0<a<3$

これと $0 \leqq a \leqq 2$ の共通範囲は　　$0<a \leqq 2$　…… ①

[3]　$2<a$ のとき　　$f(x)$ は $x=2$ で最小となる。

ゆえに　$f(2)=2^2-2a\cdot 2+3a=4-a>0$　　よって　$a<4$

これと $2<a$ の共通範囲は　　$2<a<4$　…… ②

求める a の値の範囲は，① と ② を合わせて　　$0<a<4$　答