数学演習（２次関数）Ｈ２２．６．３０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の２次不等式を解け。

(1)　$2x^2-5x+2<0$　　(2)　$-4x^2+4x+1\leqq 0$

２．次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-8x+16>0$　　(2)　$x^2-8x+16<0$　　(3)　$x^2-8x+16\geqq 0$

(4)　$x^2-8x+16\leqq 0$　　(5)　$x^2+4x+6>0$　　(6)　$x^2+4x+6<0$

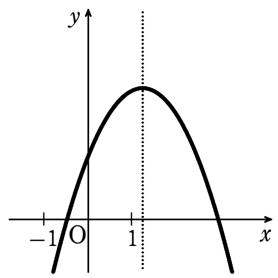
(7)　$x^2+4x+6\geqq 0$　　(8)　$x^2+4x+6\leqq 0$

３．２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を答えよ。

(1)　a，b，c　　(2)　b^2-4ac

(3)　$a+b+c$　　(4)　$a-b+c$

(5)　$2a+b$



４．すべての実数 x に対して，不等式 $x^2+ax+a+3>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

5．a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について，最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

6．a は正の定数とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

7．関数 $f(x)=|x^2-x-2|-2x$ について

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値および最小値とそのときの x の値を求めよ。

数学演習（２次関数）Ｈ２２．６．３０　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の２次不等式を解け。

(1)　$2x^2-5x+2<0$　　　(2)　$-4x^2+4x+1\leqq 0$

解答　(1)　$\frac{1}{2}<x<2$　　(2)　$x\leqq\frac{1-\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq x$

解説

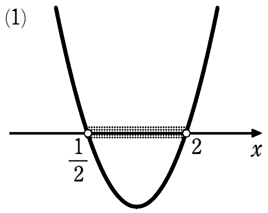
(1)　$2x^2-5x+2=0$ を解くと

左辺を因数分解して　　$(2x-1)(x-2)=0$

したがって　　$x=\frac{1}{2}$，2

よって，不等式の解は　　$\frac{1}{2}<x<2$　答

(1)



(2)　両辺に -1 を掛けて　　$4x^2-4x-1\geqq 0$

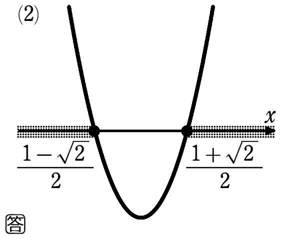
$4x^2-4x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)}}{4}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

よって，不等式の解は　　$x\leqq\frac{1-\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq x$　答

(2)



2．次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-8x+16>0$　　(2)　$x^2-8x+16<0$　　(3)　$x^2-8x+16\geqq 0$

(4)　$x^2-8x+16\leqq 0$　　(5)　$x^2+4x+6>0$　　(6)　$x^2+4x+6<0$

(7)　$x^2+4x+6\geqq 0$　　(8)　$x^2+4x+6\leqq 0$

解答　(1)　4以外のすべての実数　　(2)　解はない　　(3)　すべての実数　　(4)　$x=4$

(5)　すべての実数　　(6)　解はない　　(7)　すべての実数　　(8)　解はない

解説

(1)～(4)　$x^2-8x+16=(x-4)^2$

よって，$y=x^2-8x+16$ のグラフは，右の図のようになる。

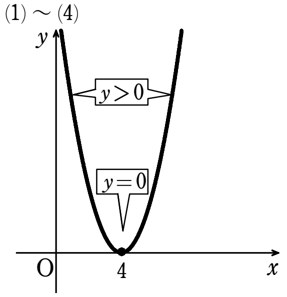
(1)　$(x-4)^2>0$ の解は　　4以外のすべての実数

(2)　$(x-4)^2<0$ の解は　　ない

(3)　$(x-4)^2\geqq 0$ の解は　　すべての実数

(4)　$(x-4)^2\leqq 0$ の解は　　$x=4$

(1)～(4)



(5)～(8)　$x^2+4x+6=(x+2)^2+2$

よって，$y=x^2+4x+6$ のグラフは，右の図のようになる。

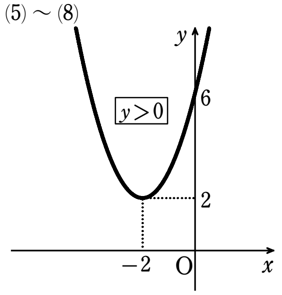
(5)　$(x+2)^2+2>0$ の解は　すべての実数

(6)　$(x+2)^2+2<0$ の解は　ない

(7)　$(x+2)^2+2\geqq 0$ の解は　すべての実数

(8)　$(x+2)^2+2\leqq 0$ の解は　ない

(5)～(8)

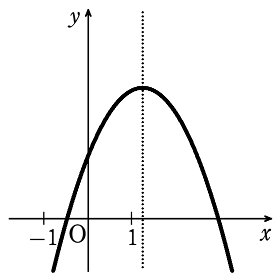


3．2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を答えよ。

(1)　a，b，c　　(2)　b^2-4ac

(3)　$a+b+c$　　(4)　$a-b+c$

(5)　$2a+b$



解答　(1)　$a<0$，$b>0$，$c>0$　　(2)　$b^2-4ac>0$　　(3)　$a+b+c>0$

(4)　$a-b+c<0$　　(5)　$2a+b>0$

解説

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

よって，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の軸は　直線 $x=-\frac{b}{2a}$，

頂点の y 座標は　$-\frac{b^2-4ac}{4a}$，y 軸との交点の y 座標は　c

(1)　グラフが上に凸であるから　$a<0$

軸が $x>0$ の部分にあるから　$-\frac{b}{2a}>0$　　$a<0$ であるから　$b>0$

グラフが y 軸の正の部分と交わっているから　$c>0$

(2)　頂点の y 座標が正であるから　$-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$

(1) より，$a<0$ であるから　$b^2-4ac>0$

(3)　$a+b+c$ は，$x=1$ における y の値である。

グラフから　$a+b+c>0$

(4)　$a-b+c$ は，$x=-1$ における y の値である。

グラフから　$a-b+c<0$

(5)　軸が $x>1$ の部分にあるから　$-\frac{b}{2a}>1$

$a<0$ であるから　$-b<2a$　　ゆえに　$2a+b>0$

4．すべての実数 x に対して，不等式 $x^2+ax+a+3>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-2<a<6$

解説

x^2 の係数は正であるから，常に不等式が成り立つ条件は

$D=a^2-4(a+3)<0$

すなわち　$a^2-4a-12<0$

よって　$(a+2)(a-6)<0$

ゆえに　$-2<a<6$

5．a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ について，最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

解答

aの範囲	$a\leqq 0$	$0<a<\frac{1}{2}$	$a=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<a<1$	$1\leqq a$
最大値	a^2-2a+1	a^2-2a+1	$\frac{1}{4}$	a^2	a^2
そのときのx	$x=a$	$x=a$	$x=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$	$x=a+1$	$x=a+1$
最小値	a^2	0	0	0	a^2-2a+1
そのときのx	$x=a+1$	$x=1$	$x=1$	$x=1$	$x=a$

解説

$y=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

この関数のグラフの軸の方程式は　$x=1$

また　$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$,

$x=a+1$ のとき　$y=a^2$,

$x=1$ のとき　$y=0$

よって　最小値は軸　$x=1$　が定義域　$a\leqq x\leqq a+1$　に入る入らないで場合分け

最大値は　定義域　$a\leqq x\leqq a+1$　の中央は$x=a+\frac{1}{2}$より

軸　$x=1$　と　中央$x=a+\frac{1}{2}$の位置関係で場合分け

<最小値>

[1]　$a+1\leqq 1$　つまり　$a\leqq 0$ のとき　，グラフは [図] のようになる。

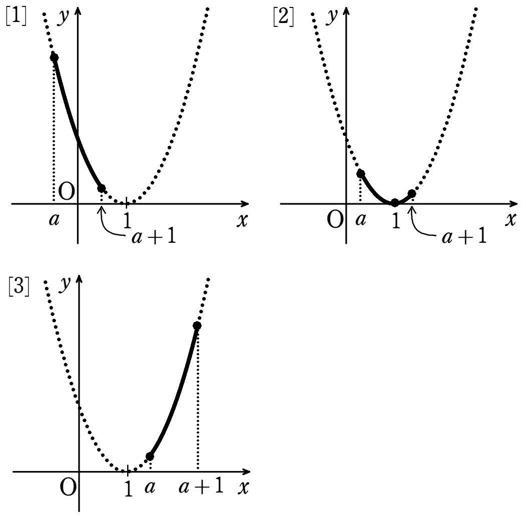
よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2]　$a<1<a+1$　つまり　$0<a<1$ のとき　グラフは [図] のようになる。

よって，$x=1$ で最小値 0　をとる。

[3]　$1\leqq a$ のとき　グラフは [図] のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1 をとる。



＜最小値＞

[1] $a+\frac{1}{2}<1$ つまり $a<\frac{1}{2}$ のとき グラフは[図]のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1 をとる。

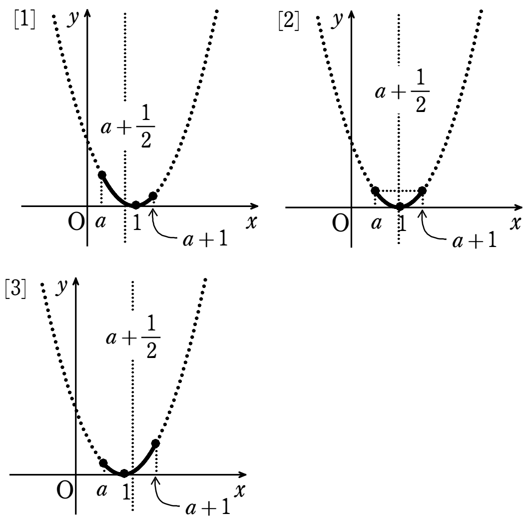
[2] $a+\frac{1}{2}=1$ つまり $a=\frac{1}{2}$ のとき グラフは[図]のようになる。

このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

よって，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

[3] $a+\frac{1}{2}>1$ つまり $\frac{1}{2}<a$ のとき グラフは[図]のようになる。

よって，$x=a+1$ で最大値 a^2 をとる。



6．a は正の定数とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

解答

aの範囲	$0<a<1$	$1\leqq a<2$	$a=2$	$2<a$
最大値	-1	-1	-1	a^2-2a-1
そのときのx	$x=0$	$x=0$	$x=0,\ 2$	$x=a$
最小値	a^2-2a-1	-2	-2	-2
そのときのx	$x=a$	$x=1$	$x=1$	$x=1$

解説

$y=x^2-2x-1$

$=(x-1)^2-2$ $(0\leqq x\leqq a)$

よって 軸は $x=1$ であり，グラフは $x=1$ で最小となる。

ゆえに最小値は 定義域 $0\leqq x\leqq a$ の中に軸が入る入らないで場合分け

最大値について $y=x^2-2x-1$ において$x=0$のとき$y=-1$となる。

グラフ上で$x=0$の他に$y=-1$となる場所は，yに-1を代入して

$-1=x^2-2x-1$ より $x^2-2x=0$ より $x=0, 2$

よって，$x=0$のときと$x=2$のときは yの値が同じになる

ゆえに最大値は 定義域$0\leqq x\leqq a$に$x=2$が入る入らないで場合分け

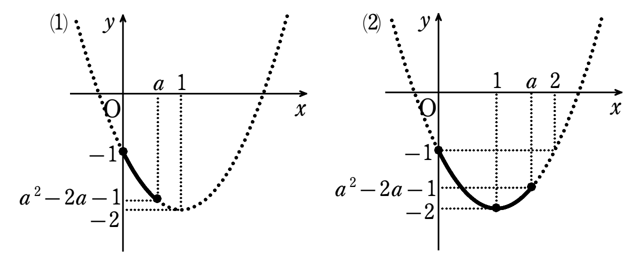
条件より $a>0$ に注意して

(1) $0<a<1$ のとき，グラフは[図]のようになる。

よって $x=0$ で最大値 -1，$x=a$ で最小値 a^2-2a-1 をとる。

(2) $1\leqq a<2$ のとき，グラフは[図]のようになる。

よって $x=0$ で最大値 -1，$x=1$ で最小値 -2 をとる。

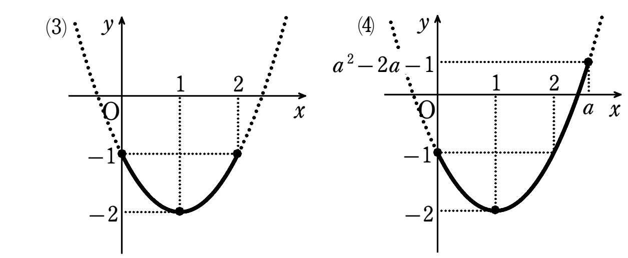


(3) $a=2$ のとき，グラフは[図]のようになる。

よって $x=0$，2 で最大値 -1，$x=1$ で最小値 -2 をとる。

(4) $2<a$ のとき，グラフは[図]のようになる。

よって $x=a$ で最大値 a^2-2a-1，$x=1$ で最小値 -2 をとる。



7．関数 $f(x)=|x^2-x-2|-2x$ について

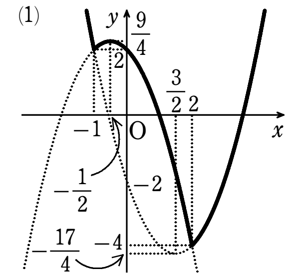
(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $-1\leqq x\leqq 3$ における最大値および最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答 (1) [図]

(2) 最大値 $\frac{9}{4}$ $\left(x=-\frac{1}{2}\right)$

最小値 -4 $(x=2)$



解説

(1) $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x^2-x-2\geqq 0$ つまり $x\leqq -1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$である。よって

$y=(x^2-x-2)-2x$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$x^2-x-2<0$ つまり $-1<x<2$ のとき

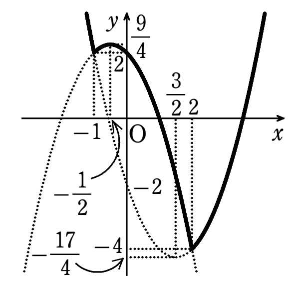
$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$である。よって

$y=-(x^2-x-2)-2x$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

$x=-1$ のとき $y=2$，

$x=2$ のとき $y=-4$ で，グラフは右上の図の実線部分のようになる。



(2) (1)のグラフにおいて$-1\leqq x\leqq 3$ の部分を考える。すると

$x=-\frac{1}{2}$ のとき 最大値 $\frac{9}{4}$

$x=2$ のとき 最小値 -4