

1. 次の2次不等式を解け。

(1)  $6x^2 - 5x + 1 > 0$

(2)  $x^2 - 2x - 2 \leq 0$

(3)  $4x^2 - 5x - 3 < 0$

(4)  $x^2 - 4x - 12 \geq 0$

(5)  $-x^2 - x + 2 \geq 0$

(6)  $2x - 3 > -x^2$

4. 次の2次不等式を解け。

(1)  $12x^2 - 5x - 3 > 0$

(2)  $9x^2 - 6x - 1 < 0$

(3)  $x^2 - x - 6 \geq 0$

(4)  $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$

2. 次の2次不等式を解け。

(1)  $x^2 - 8x + 16 > 0$

(2)  $4x^2 + 4x + 1 < 0$

(3)  $x^2 - 5x + 8 \geq 0$

(4)  $-3x^2 + 12x - 13 \geq 0$

5. 次の連立不等式を解け。

(1)  $\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ 5x^2 - 14x + 9 > 0 \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} x^2 > 1 + x \\ x \leq 15 - 6x^2 \end{cases}$

(3)  $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$

3. 次の2次不等式を解け。

(1)  $\sqrt{2}(x^2 + 2) \geq 4x$

(2)  $-2x^2 + 12x - 18 \geq 0$

(3)  $2x^2 - 8x + 13 > 0$

(4)  $-2x^2 + 3x - 6 > 0$

6. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $x^2 + ax + a + 3 > 0$  が成り立つように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。7. (1)  $x$  についての2次不等式  $x^2 + ax + b \geq 0$  の解が  $x \leq -1, 3 \leq x$  となるように、定数  $a, b$  の値を定めよ。(2)  $x$  についての2次不等式  $ax^2 - 9x - a^2 > 0$  の解が  $-4 < x < b$  となるように、定数  $a, b$  の値を定めよ。

8. (1) 2次方程式  $x^2+kx+k+8=0$  が異なる2つの実数の解をもつように、定数  $k$  の値の範囲を定めよ。

(2) 方程式  $mx^2+(m-1)x+2=0$  が実数の解をもたないようすに、定数  $m$  の値の範囲を定めよ。

9. 放物線  $y=x^2-ax+a+1$  が  $x$  軸と接するようすに、定数  $a$  の値を定めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

10. 2次関数  $y=-x^2-4x+a$  が  $-3 \leq x \leq 1$  において、常に正の値をとるようすに、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

11.  $k$  は定数とする。放物線  $y=x^2-2x+2k-4$  と  $x$  軸の共有点の個数を、 $k$  の値によって場合分けをして求めよ。

12. (1) 放物線  $y=-4x^2+7x+11$  が  $x$  軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(2) 放物線  $y=x^2-ax+a-1$  が  $x$  軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。

13. 次の放物線と直線の共有点はあるか。あればその座標を求めよ。

(1)  $y=x^2-3x+3, y=2x-1$

(2)  $y=x^2-3x, y=3x-9$

(3)  $y=-x^2+1, y=-2x+3$

1. 次の2次不等式を解け。

- (1)  $6x^2 - 5x + 1 > 0$  (2)  $x^2 - 2x - 2 \leq 0$  (3)  $4x^2 - 5x - 3 < 0$   
 (4)  $x^2 - 4x - 12 \geq 0$  (5)  $-x^2 - x + 2 \geq 0$  (6)  $2x - 3 > -x^2$

解答 (1)  $x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$  (2)  $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$

$$(3) \frac{5 - \sqrt{73}}{8} < x < \frac{5 + \sqrt{73}}{8} \quad (4) x \leq -2, 6 \leq x \quad (5) -2 \leq x \leq 1$$

$$(6) x < -3, 1 < x$$

(解説)

(1) 左辺を因数分解すると

$$(2x-1)(3x-1) > 0$$

2次方程式  $(2x-1)(3x-1) = 0$  を解くと

$$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

ゆえに、この2次不等式の解は

$$x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$$

別解 2次方程式  $6x^2 - 5x + 1 = 0$  を解くと

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

よって、この2次不等式の解は

$$x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$$

(2) 2次方程式  $x^2 - 2x - 2 = 0$  を解くと

$$x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-2)} = 1 \pm \sqrt{3}$$

ゆえに、この2次不等式の解は

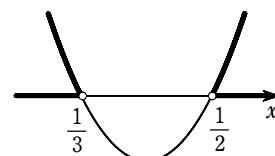
$$1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$$

(3) 2次方程式  $4x^2 - 5x - 3 = 0$  を解くと

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$$

ゆえに、この2次不等式の解は

$$\frac{5 - \sqrt{73}}{8} < x < \frac{5 + \sqrt{73}}{8}$$

(4) 左辺を因数分解すると  $(x+2)(x-6) \geq 0$ ゆえに  $\{x - (-2)\}(x-6) \geq 0$ よって  $x \leq -2, 6 \leq x$ (5) 両辺に -1 を掛けると  $x^2 + x - 2 \leq 0$ 左辺を因数分解すると  $(x-1)(x+2) \leq 0$ ゆえに  $(x-1)(x-(-2)) \leq 0$ よって  $-2 \leq x \leq 1$ (6) 与式を変形すると  $x^2 + 2x - 3 > 0$ 左辺を因数分解すると  $(x-1)(x+3) > 0$ ゆえに  $(x-1)(x-(-3)) > 0$ よって  $x < -3, 1 < x$ 

2. 次の2次不等式を解け。

- (1)  $x^2 - 8x + 16 > 0$  (2)  $4x^2 + 4x + 1 < 0$   
 (3)  $x^2 - 5x + 8 \geq 0$  (4)  $-3x^2 + 12x - 13 \geq 0$

解答 (1) 4以外のすべての実数 (2) ない (3) すべての実数 (4) ない

(解説)

(1) 左辺を因数分解して  $(x-4)^2 > 0$  $x-4 \neq 0$  ならば、 $(x-4)^2 > 0$  が成り立つ。

ゆえに、求める解は 4以外のすべての実数

(2) 左辺を因数分解して  $(2x+1)^2 < 0$  $(2x+1)^2 \geq 0$  であるから、上の不等式を満たす  $x$  はない。

ゆえに、解は ない

(3)  $x^2$  の係数は 1 で正である。また、2次方程式  $x^2 - 5x + 8 = 0$  において

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 8 = -7 < 0$$

ゆえに、すべての実数  $x$  について  $x^2 - 5x + 8 > 0$  が成り立つから、求める解はすべての実数(4) 与式の両辺に -1 を掛けると  $3x^2 - 12x + 13 \leq 0$ 2次方程式  $3x^2 - 12x + 13 = 0$  において

$$D/4 = (-6)^2 - 3 \cdot 13 = -3 < 0$$

ゆえに、すべての実数  $x$  について  $3x^2 - 12x + 13 > 0$  が成り立つ。

よって、解は ない

3. 次の2次不等式を解け。

- (1)  $\sqrt{2}(x^2 + 2) \geq 4x$  (2)  $-2x^2 + 12x - 18 \geq 0$   
 (3)  $2x^2 - 8x + 13 > 0$  (4)  $-2x^2 + 3x - 6 > 0$

解答 (1) すべての実数 (2)  $x = 3$  (3) すべての実数 (4) ない

(解説)

(1) 両辺を  $\sqrt{2}$  で割ると

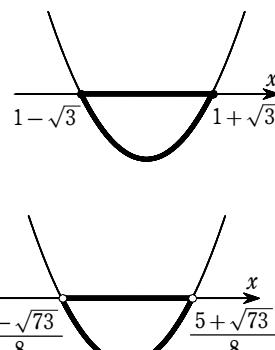
$$x^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}x$$

変形して  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0$ 

左辺を因数分解して

$$(x - \sqrt{2})^2 \geq 0$$

ゆえに、求める解は、すべての実数



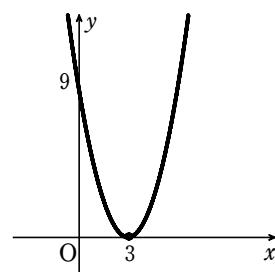
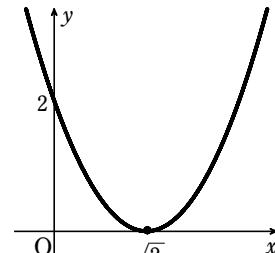
(2) 両辺を -2 で割ると

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

左辺を因数分解して

$$(x-3)^2 \leq 0$$

$(x-3)^2 \geq 0$  であるから、上の不等式を満たす  $x$  は 3 のみ。

ゆえに、求める解は  $x = 3$ (3)  $x^2$  の係数は 2 で正である。2次方程式  $2x^2 - 8x + 13 = 0$  において

$$D/4 = (-4)^2 - 2 \cdot 13 = 16 - 26 < 0$$

ゆえに、すべての実数  $x$  について  $2x^2 - 8x + 13 > 0$  が成り立つから、求める解は、すべての実数別解  $2x^2 - 8x + 13 = 2(x-2)^2 + 5$  $(x-2)^2 \geq 0$  であるから、すべての  $x$  について

$$2(x-2)^2 + 5 > 0$$

すなわち  $2x^2 - 8x + 13 > 0$ 

したがって、求める解は すべての実数

(4) 両辺に -1 を掛けると

$$2x^2 - 3x + 6 < 0$$

 $x^2$  の係数は 2 で正である。2次方程式  $2x^2 - 3x + 6 = 0$  において

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 < 0$$

ゆえに、すべての実数  $x$  について  $2x^2 - 3x + 6 > 0$  が成り立つ。

よって、解はない。

別解 両辺に -1 を掛けると

$$2x^2 - 3x + 6 < 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

①の左辺を変形して

$$2x^2 - 3x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$$

 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$  であるから、すべての実数  $x$  について

$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} > 0$$

よって、①を満たす実数  $x$  はない。

すなわち、与えられた不等式を満たす解はない。

4. 次の2次不等式を解け。

- (1)  $12x^2 - 5x - 3 > 0$  (2)  $9x^2 - 6x - 1 < 0$   
 (3)  $x^2 - x - 6 \geq 0$  (4)  $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$

解答 (1)  $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{4} < x$  (2)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$  (3)  $x \leq -2, 3 \leq x$

(4)  $2 \leq x \leq 5$ 

(解説)

(1) 左辺を因数分解すると

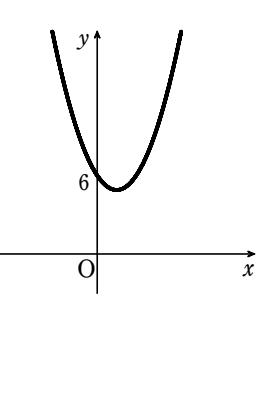
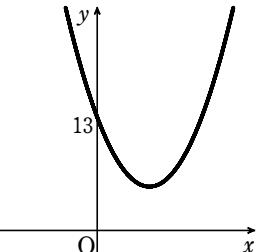
$$(3x+1)(4x-3) > 0$$

2次方程式  $(3x+1)(4x-3) = 0$  を解くと  $x = -\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ ゆえに、この2次不等式の解は  $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{4} < x$ (2) 2次方程式  $9x^2 - 6x - 1 = 0$  を解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 9 \cdot (-1)}}{9} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}$$

ゆえに、この2次不等式の解は

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

(3) 左辺を因数分解すると  $(x+2)(x-3) \geq 0$ ゆえに  $x \leq -2, 3 \leq x$ (4) 両辺に -1 を掛けると  $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ 

左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

ゆえに

$$2 \leq x \leq 5$$

5. 次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 5x^2-14x+9 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 > 1+x \\ x \leq 15-6x^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

解答 (1)  $x < 1$  (2)  $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (3) 解はない

解説

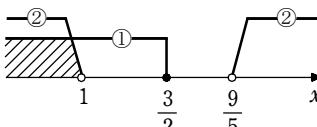
(1)  $2x-3 \leq 0$  を解いて  $x \leq \frac{3}{2}$  ..... ①

$5x^2-14x+9 > 0$  の左辺を因数分解すると  
 $(x-1)(5x-9) > 0$

ゆえに  $x < 1, \frac{9}{5} < x$  ..... ②

①, ② の共通範囲を求める

$$x < 1$$



(2)  $\begin{cases} x^2 > 1+x & \dots \text{①} \\ x \leq 15-6x^2 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

①を変形すると  $x^2-x-1 > 0$

$x^2-x-1=0$  を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに、①の解は

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \dots \text{③}$$

②を変形すると  $6x^2+x-15 \leq 0$

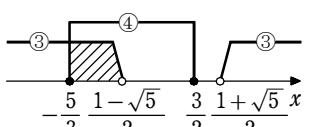
左辺を因数分解すると  $(2x-3)(3x+5) \leq 0$

ゆえに、②の解は

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \dots \text{④}$$

③, ④ の共通範囲を求める

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



(3)  $\begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 & \dots \text{①} \\ x^2-x-2 < 0 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

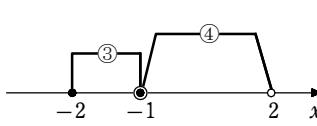
①から  $(x+1)(x+2) \leq 0$

よって  $-2 \leq x \leq -1$  ..... ③

②から  $(x+1)(x-2) < 0$

よって  $-1 < x < 2$  ..... ④

③, ④ の共通範囲はないから、  
求める解はない。



6. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $x^2+ax+a+3 > 0$  が成り立つように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

解答  $-2 < a < 6$

解説

$x^2$  の係数は正であるから、常に不等式が成り立つ条件は

$$D = a^2 - 4(a+3) < 0$$

すなわち  $a^2 - 4a - 12 < 0$

よって  $(a+2)(a-6) < 0$

ゆえに  $-2 < a < 6$

$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 5$$

5. 次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 5x^2-14x+9 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 > 1+x \\ x \leq 15-6x^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

解答 (1)  $x < 1$  (2)  $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (3) 解はない

解説

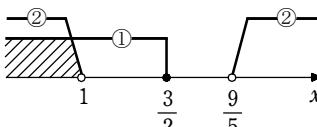
(1)  $2x-3 \leq 0$  を解いて  $x \leq \frac{3}{2}$  ..... ①

$5x^2-14x+9 > 0$  の左辺を因数分解すると  
 $(x-1)(5x-9) > 0$

ゆえに  $x < 1, \frac{9}{5} < x$  ..... ②

①, ② の共通範囲を求める

$$x < 1$$



(2)  $\begin{cases} x^2 > 1+x & \dots \text{①} \\ x \leq 15-6x^2 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

①を変形すると  $x^2-x-1 > 0$

$x^2-x-1=0$  を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに、①の解は

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \dots \text{③}$$

②を変形すると  $6x^2+x-15 \leq 0$

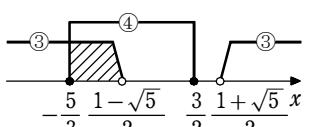
左辺を因数分解すると  $(2x-3)(3x+5) \leq 0$

ゆえに、②の解は

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \dots \text{④}$$

③, ④ の共通範囲を求める

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



(3)  $\begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 & \dots \text{①} \\ x^2-x-2 < 0 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

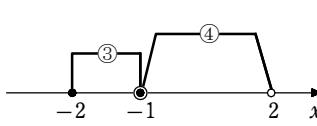
①から  $(x+1)(x+2) \leq 0$

よって  $-2 \leq x \leq -1$  ..... ③

②から  $(x+1)(x-2) < 0$

よって  $-1 < x < 2$  ..... ④

③, ④ の共通範囲はないから、  
求める解はない。



$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 5$$

5. 次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 5x^2-14x+9 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 > 1+x \\ x \leq 15-6x^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

解答 (1)  $x < 1$  (2)  $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (3) 解はない

解説

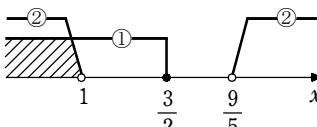
(1)  $2x-3 \leq 0$  を解いて  $x \leq \frac{3}{2}$  ..... ①

$5x^2-14x+9 > 0$  の左辺を因数分解すると  
 $(x-1)(5x-9) > 0$

ゆえに  $x < 1, \frac{9}{5} < x$  ..... ②

①, ② の共通範囲を求める

$$x < 1$$



(2)  $\begin{cases} x^2 > 1+x & \dots \text{①} \\ x \leq 15-6x^2 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

①を変形すると  $x^2-x-1 > 0$

$x^2-x-1=0$  を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに、①の解は

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \dots \text{③}$$

②を変形すると  $6x^2+x-15 \leq 0$

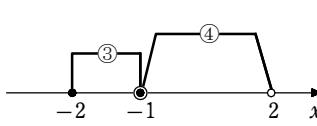
左辺を因数分解すると  $(2x-3)(3x+5) \leq 0$

ゆえに、②の解は

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \dots \text{④}$$

③, ④ の共通範囲を求める

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



(3)  $\begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 & \dots \text{①} \\ x^2-x-2 < 0 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

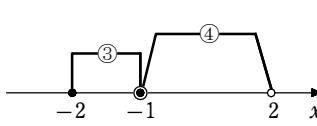
①から  $(x+1)(x+2) \leq 0$

よって  $-2 \leq x \leq -1$  ..... ③

②から  $(x+1)(x-2) < 0$

よって  $-1 < x < 2$  ..... ④

③, ④ の共通範囲はないから、  
求める解はない。



$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 5$$

5. 次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 5x^2-14x+9 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 > 1+x \\ x \leq 15-6x^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+3x+2 \leq 0 \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

解答 (1)  $x < 1$  (2)  $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (3) 解はない

解説

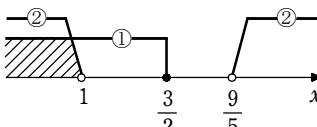
(1)  $2x-3 \leq 0$  を解いて  $x \leq \frac{3}{2}$  ..... ①

$5x^2-14x+9 > 0$  の左辺を因数分解すると  
 $(x-1)(5x-9) > 0$

ゆえに  $x < 1, \frac{9}{5} < x$  ..... ②

①, ② の共通範囲を求める

$$x < 1$$



(2)  $\begin{cases} x^2 > 1+x & \dots \text{①} \\ x \leq 15-6x^2 & \dots \text{②} \end{cases}$  とおく。

①を変形すると  $x^2-x-1 > 0$

$x^2-x-1=0$  を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに、①の解は

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \dots \text{③}$$

②を変形すると  $6x^2+x-15 \leq 0$

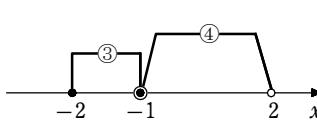
左辺を因数分解すると  $(2x-3)(3x+5) \leq 0$

ゆえに、②の解は

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \dots \text{④}$$

③, ④ の共通範囲を求める

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



$D/4 > 0$  すなわち  $k < \frac{5}{2}$  のとき 2 個

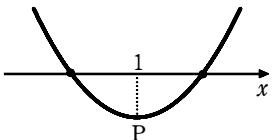
$D/4 = 0$  すなわち  $k = \frac{5}{2}$  のとき 1 個

$D/4 < 0$  すなわち  $k > \frac{5}{2}$  のとき 0 個

**別解**  $y = (x-1)^2 + 2k-5$  であるから、この放物線の頂点  $P$  の座標は  $P(1, 2k-5)$  で、下に凸のグラフである。

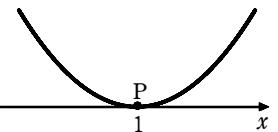
$P$  が  $x$  軸より下にあるとき、共有点の個数は 2 個である。

ゆえに  $2k-5 < 0$  すなわち  $k < \frac{5}{2}$  のとき 2 個



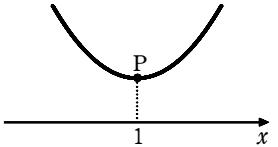
$P$  が  $x$  軸上にあるとき、共有点の個数は 1 個である。

ゆえに  $2k-5 = 0$  すなわち  $k = \frac{5}{2}$  のとき 1 個



$P$  が  $x$  軸より上にあるとき、共有点の個数は 0 個である。

ゆえに  $2k-5 > 0$  すなわち  $k > \frac{5}{2}$  のとき 0 個



12. (1) 放物線  $y = -4x^2 + 7x + 11$  が  $x$  軸から切り取る線分の長さを求める。

(2) 放物線  $y = x^2 - ax + a - 1$  が  $x$  軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき、定数  $a$  の値を求める。

**解答** (1)  $\frac{15}{4}$  (2)  $a = 8, -4$

**解説**

(1)  $-4x^2 + 7x + 11 = 0$  とすると

$4x^2 - 7x - 11 = 0$  から  $(x+1)(4x-11) = 0$

ゆえに  $x = -1, \frac{11}{4}$

$$\begin{array}{r} 1 \times \cancel{4} \quad 1 \rightarrow 4 \\ \cancel{4} \times -11 \rightarrow -11 \\ \hline 4 \quad -11 \quad -7 \end{array}$$

したがって、 $x$  軸から切り取る線分の長さは

$$\frac{11}{4} - (-1) = \frac{11}{4} + 1 = \frac{15}{4}$$

(2) 放物線は  $x$  軸と異なる 2 点で交わるから、2 次方程式  $x^2 - ax + a - 1 = 0$  の係数について

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-1) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 > 0$$

ゆえに  $a \neq 2$

また、放物線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とすると、 $\alpha, \beta$  は 2 次方程式  $x^2 - ax + a - 1 = 0$  の実数の解で、その解は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{a \pm |a-2|}{2} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{よって } \alpha = \frac{a-|a-2|}{2}, \beta = \frac{a+|a-2|}{2}$$

$$\beta - \alpha = 6 \text{ であるから } |a-2| = 6 \quad \text{ゆえに } a-2 = \pm 6$$

したがって  $a = 8, -4$  これらは  $a \neq 2$  を満たす。

13. 次の放物線と直線の共有点はあるか。あればその座標を求める。

(1)  $y = x^2 - 3x + 3, y = 2x - 1$  (2)  $y = x^2 - 3x, y = 3x - 9$

(3)  $y = -x^2 + 1, y = -2x + 3$

**解答** (1) (1, 1), (4, 7) (2) (3, 0) (3) 共有点はない

**解説**

(1)  $y = x^2 - 3x + 3 \cdots \textcircled{1}, y = 2x - 1 \cdots \textcircled{2}$  とおく。

①, ② から、 $y$  を消去すると

$$x^2 - 3x + 3 = 2x - 1$$

ゆえに  $x^2 - 5x + 4 = 0$

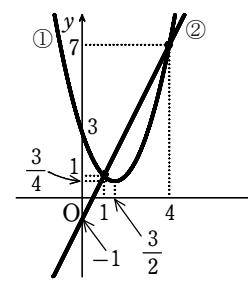
よって  $(x-1)(x-4) = 0$

ゆえに  $x = 1, 4$

② から  $x = 1$  のとき  $y = 1$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 7$$

よって、共有点はあり、その座標は (1, 1), (4, 7)



(2)  $y = x^2 - 3x \cdots \textcircled{1}, y = 3x - 9 \cdots \textcircled{2}$  とおく。

①, ② から、 $y$  を消去すると

$$x^2 - 3x = 3x - 9$$

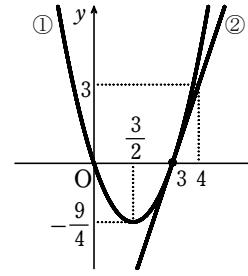
ゆえに  $x^2 - 6x + 9 = 0$

よって  $(x-3)^2 = 0$

ゆえに  $x = 3$  (重解)

② から  $x = 3$  のとき  $y = 0$

よって、共有点はあり、その座標は (3, 0)



(3)  $y = -x^2 + 1, y = -2x + 3$  から、 $y$  を消去すると

$$-x^2 + 1 = -2x + 3$$

ゆえに  $x^2 - 2x + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$

①について  $D/4 = (-1)^2 - 1 \cdot 2 = -1 < 0$

よって、方程式 ① は実数の解をもたない。

したがって、共有点はない。

