数学演習（２次不等式）Ｈ２１．９．７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の２次不等式を解け。

(1) $12x^2-5x-3>0$

(2) $9x^2-6x-1<0$

(3) $x^2-8x+16>0$

(4) $4x^2+4x+1<0$

(5) $x^2-5x+8\geqq 0$

(6) $-3x^2+12x-13\geqq 0$

2．次の連立不等式を解け。 $\begin{cases} x^2-4x+1\geqq 0 \\ -x^2-x+12>0 \end{cases}$

3．２次不等式 $ax^2+bx+2<0$ について，解が $x<-1$，$2<x$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

4．すべての実数 x に対して，不等式 $kx^2+3kx+k-1<0$ が成り立つように，定数 k の値の範囲を定めよ。

5．x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど３つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

6. a は定数とする。次の不等式を解け。　$x^2-3ax+2a^2+a-1>0$

7. 不等式 $x^2-2x\leqq 0$ を満たすすべての x が $x^2-2ax+3a>0$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

8. 不等式 $x^2+2ax+1\leqq 0$　…… ①，$2x^2+7x-4\leqq 0$　…… ② について，不等式 ① の解が常に存在するとする。このとき，不等式 ① を満たす x がすべて不等式 ② を満たすような a の値の範囲を求めよ。

数学演習（２次不等式）Ｈ２１．９．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の２次不等式を解け。

(1)　$12x^2-5x-3>0$　　(2)　$9x^2-6x-1<0$

(3)　$x^2-8x+16>0$　　(4)　$4x^2+4x+1<0$

(5)　$x^2-5x+8\geqq 0$　　(6)　$-3x^2+12x-13\geqq 0$

$\boxed{解答}$　(1)　$x<-\frac{1}{3},\ \frac{3}{4}<x$　　(2)　$\frac{1-\sqrt{2}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{3}$　　(3)　4以外のすべての実数

(4)　ない　　(5)　すべての実数　　(6)　ない

(1)　左辺を因数分解すると　　$(3x+1)(4x-3)>0$

２次方程式 $(3x+1)(4x-3)=0$ を解くと　　$x=-\frac{1}{3},\ \frac{3}{4}$

ゆえに，この２次不等式の解は　　$x<-\frac{1}{3},\ \frac{3}{4}<x$

(2)　２次方程式 $9x^2-6x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-9\cdot(-1)}}{9}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに，この２次不等式の解は

$$\frac{1-\sqrt{2}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

(3)　左辺を因数分解して　　$(x-4)^2>0$

$x-4\neq 0$ ならば，$(x-4)^2>0$ が成り立つ。

ゆえに，求める解は　4以外のすべての実数

(4)　左辺を因数分解して　　$(2x+1)^2<0$

$(2x+1)^2\geqq 0$ であるから，上の不等式を満たす x はない。

ゆえに，解は　ない

(5)　x^2 の係数は1で正である。

また，２次方程式 $x^2-5x+8=0$ において

$$D=(-5)^2-4\cdot 8=-7<0$$

ゆえに，すべての実数 x について $x^2-5x+8>0$ が成り立つから，求める解は

すべての実数

(6)　与式の両辺に -1 を掛けると　　$3x^2-12x+13\leqq 0$

２次方程式 $3x^2-12x+13=0$ において

$$D/4=(-6)^2-3\cdot 13=-3<0$$

ゆえに，すべての実数 x について $3x^2-12x+13>0$ が成り立つ。

よって，解は　ない

2．次の連立不等式を解け。　$\begin{cases} x^2-4x+1\geqq 0 \\ -x^2-x+12>0 \end{cases}$

$\boxed{解答}$　$-4<x\leqq 2-\sqrt{3}$

$x^2-4x+1=0$ を解くと　　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって，$x^2-4x+1\geqq 0$ の解は

$x\leqq 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\leqq x$　……①

$-x^2-x+12>0$ の両辺に -1 を掛けて

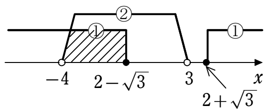
$x^2+x-12<0$

ゆえに　　$(x-3)(x+4)<0$

よって　　$-4<x<3$　……②

①，② の共通範囲を求めると

$-4<x\leqq 2-\sqrt{3}$



3．2次不等式 $ax^2+bx+2<0$ について，解が $x<-1,\ 2<x$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

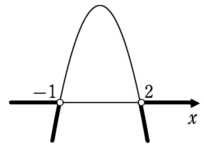
$\boxed{解答}$　$a=-1,\ b=1$

条件から，$y=ax^2+bx+2$ のグラフは $x<-1,\ 2<x$ の範囲で x 軸より下方にある。すなわち，上に凸である放物線で，2点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$a<0$　……①

$a-b+2=0$　……②

$4a+2b+2=0$　……③



②，③ を連立して解くと

$a=-1,\ b=1$　　これは ① を満たす。

4．すべての実数 x に対して，不等式 $kx^2+3kx+k-1<0$ が成り立つように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{解答}$　$-\frac{4}{5}<k\leqq 0$

$k=0$ のとき　　(左辺)$=-1<0$

ゆえに，$k=0$ のとき，常に不等式は成り立つ。

$k\neq 0$ のとき　　常に不等式が成り立つ条件は

$k<0$ かつ $D=(3k)^2-4k(k-1)<0$

すなわち　　$k<0$ かつ $k(5k+4)<0$

よって　　$-\frac{4}{5}<k<0$

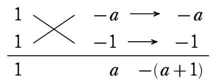
以上から　　$-\frac{4}{5}<k\leqq 0$

5．x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど3つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{解答}$　$-5\leqq a<-4,\ 4<a\leqq 5$

$x^2-(a+1)x+a<0$　……①，$3x^2+2x-1>0$　……② とおく。

① の左辺を因数分解して　　$(x-a)(x-1)<0$



ゆえに，① の解は

$a<1$ のとき　$a<x<1$

$a=1$ のとき　$(x-1)^2<0$ から　解なし

$1<a$ のとき　$1<x<a$

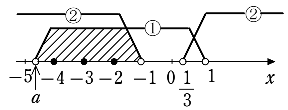
また，② の解は，$(x+1)(3x-1)>0$ から　　$x<-1,\ \frac{1}{3}<x$

[1]　$a<1$ のとき

①，② を同時に満たす整数 x がちょうど3個存在する条件は，右の図から，

$a<x<-1$ の範囲の整数が -2，-3，-4 であること。

ゆえに　　$-5\leqq a<-4$



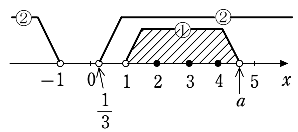
[2]　$a=1$ のとき

① の解はないから不適。

[3]　$a>1$ のとき

①，② を同時に満たす整数 x がちょうど3個存在する条件は，右の図から，$1<x<a$ の範囲の整数が 2，3，4 であること。

ゆえに　　$4<a\leqq 5$



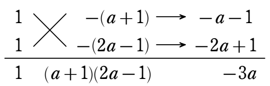
以上から　　$-5\leqq a<-4,\ 4<a\leqq 5$

6. a は定数とする。次の不等式を解け。　$x^2-3ax+2a^2+a-1>0$

解答　$a>2$ のとき $x<a+1$，$2a-1<x$；$a=2$ のとき 3 以外のすべての実数；
$a<2$ のとき $x<2a-1$，$a+1<x$

$x^2-3ax+2a^2+a-1>0$ から

$$x^2-3ax+(a+1)(2a-1)>0$$



よって　$\{x-(a+1)\}\{x-(2a-1)\}>0$

[1]　$a+1<2a-1$　すなわち　$a>2$ のとき

$$x<a+1,\ 2a-1<x$$

[2]　$a+1=2a-1$　すなわち　$a=2$ のとき

不等式は　$\{x-(a+1)\}^2>0$　すなわち　$(x-3)^2>0$

ゆえに，求める解は　3 以外のすべての実数

[3]　$a+1>2a-1$　すなわち　$a<2$ のとき

$$x<2a-1,\ a+1<x$$

よって　$a>2$ のとき　$x<a+1$，$2a-1<x$

$a=2$ のとき　3 以外のすべての実数

$a<2$ のとき　$x<2a-1$，$a+1<x$

7. 不等式 $x^2-2x\leqq 0$ を満たすすべての x が $x^2-2ax+3a>0$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$0<a<4$

$x^2-2x\leqq 0$ を解くと　$x(x-2)\leqq 0$

ゆえに　$0\leqq x\leqq 2$

$f(x)=x^2-2ax+3a$ とおくと　$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

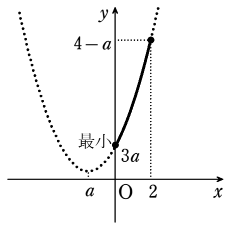
求める a の条件は，$0\leqq x\leqq 2$ において常に $f(x)>0$，すなわち $0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値が正となる条件である。

[1]　$a<0$ のとき

$f(x)$ は $x=0$ で最小であるから

$f(0)=3a>0$　　ゆえに　$a>0$

これは，$a<0$ を満たさない。



[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

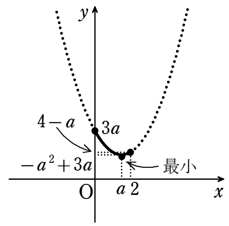
$f(x)$ は $x=a$ で最小であるから

$f(a)=-a^2+3a>0$

これを解くと　$0<a<3$

$0\leqq a\leqq 2$ との共通範囲は

$0<a\leqq 2$　……①



[3]　$2<a$ のとき

$f(x)$ は $x=2$ で最小であるから

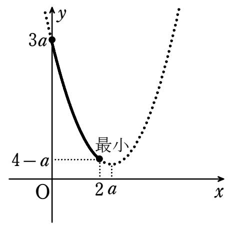
$f(2)=4-4a+3a>0$

これを解くと　$a<4$

$2<a$ との共通範囲は

$2<a<4$　……②

求める a の値の範囲は，① と ② を合わせて　$0<a<4$



8. 不等式 $x^2+2ax+1\leqq 0$　……①，$2x^2+7x-4\leqq 0$　……② について，不等式 ① の解が常に存在するとする。このとき，不等式 ① を満たす x がすべて不等式 ② を満たすような a の値の範囲を求めよ。

解答　$1\leqq a\leqq \dfrac{17}{8}$

$2x^2+7x-4\leqq 0$ から　$(x+4)(2x-1)\leqq 0$

ゆえに，② の解は　$-4\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$

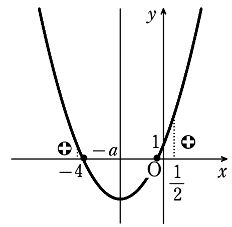
ここで，$f(x)=x^2+2ax+1$ とおくと，① の解は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より下側にある部分 (x 軸との共有点を含む) の x の値の範囲である。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+1$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，直線 $x=-a$ である。

また，$D'=a^2-1$ とおくと，求める条件は

$$D'\geqq 0,\ f(-4)\geqq 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq 0,$$

$$-4\leqq -a\leqq \frac{1}{2}$$



$D'=a^2-1\geqq 0$ から　$a\leqq -1$，$1\leqq a$　……③

$f(-4)=17-8a\geqq 0$ から　$a\leqq \dfrac{17}{8}$　……④

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a+\dfrac{5}{4}\geqq 0$ から

$a\geqq -\dfrac{5}{4}$　……⑤

$-4\leqq -a\leqq \dfrac{1}{2}$ から

$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 4$　……⑥

③ ～ ⑥ から　$1\leqq a\leqq \dfrac{17}{8}$