数学演習（２次不等式）Ｈ２５．７．２２　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-2x-24<0$　　(2) $2x^2\geqq 7x-3$　　(3) $-2x^2-3x+3\geqq 0$

(4) $-3x^2<10-6x$　　(5) $x^2<8(x-3)$　　(6) $2(x^2+2)\leqq x(x-4)$

2．連立不等式 $\begin{cases} x^2-8x+7\leqq 0 \\ x^2-6x+3>0 \end{cases}$ を解け。

3．不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-2<x<1$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

4．放物線 $y=x^2+ax+9$ と x 軸の共有点の個数が，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ。

5．2次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負であるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

6．次の2次不等式を解け。ただし，a は定数とする。　$(x-a)(x-1)>0$

7．2次方程式 $x^2-(m-4)x+m-1=0$ が，次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの負の解をもつ。

(2) 正の解と負の解を1つずつもつ。

8．$1 \leqq x \leqq 5$ のとき，x の関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ の最大値は $^{ア}\boxed{}$，最小値は $^{イ}\boxed{}$ である。

9．2次方程式 $2x^2-3ax+a+1=0$ の1つの実数の解が0と1の間にあり，他の実数の解が4と6の間にある。このとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

1．次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x-24<0$　　(2)　$2x^2 \geqq 7x-3$　　(3)　$-2x^2-3x+3 \geqq 0$

(4)　$-3x^2<10-6x$　　(5)　$x^2<8(x-3)$　　(6)　$2(x^2+2) \leqq x(x-4)$

解答　(1)　$-4<x<6$　　(2)　$x \leqq \frac{1}{2}$，$3 \leqq x$　　(3)　$\frac{-3-\sqrt{33}}{4} \leqq x \leqq \frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

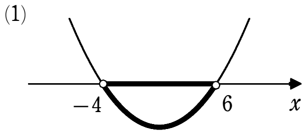
(4)　すべての実数　　(5)　解はない　　(6)　$x=-2$

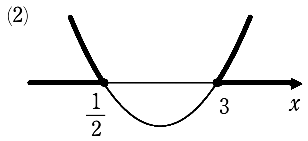
解説

(1)　$x^2-2x-24<0$ から　　$(x+4)(x-6)<0$　　よって　$-4<x<6$

(2)　整理すると　　$2x^2-7x+3 \geqq 0$　　ゆえに　　$(2x-1)(x-3) \geqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　　$x \leqq \frac{1}{2}$，$3 \leqq x$





(3)　両辺に -1 をかけて　　$2x^2+3x-3 \leqq 0$

$2x^2+3x-3=0$ を解くと　　$x=\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

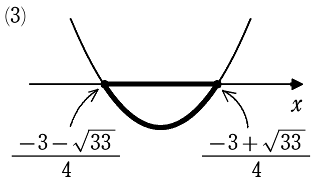
よって，与えられた不等式の解は　　$\frac{-3-\sqrt{33}}{4} \leqq x \leqq \frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

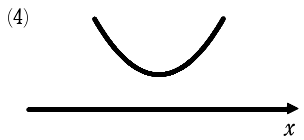
(4)　整理すると　　$-3x^2+6x-10<0$

両辺に -1 をかけて　　$3x^2-6x+10>0$

係数について　　$(-6)^2-4 \cdot 3 \cdot 10=-84<0$

よって，与えられた不等式の解は　　すべての実数





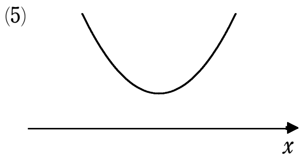
(5)　整理すると　　$x^2-8x+24<0$

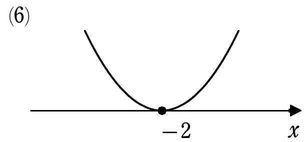
係数について　　$(-8)^2-4 \cdot 1 \cdot 24=-32<0$

よって，与えられた不等式の解はない。

(6)　整理すると　　$x^2+4x+4 \leqq 0$　　ゆえに　　$(x+2)^2 \leqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　　$x=-2$





2．連立不等式 $\begin{cases} x^2-8x+7 \leqq 0 \\ x^2-6x+3>0 \end{cases}$ を解け。

解答　$3+\sqrt{6}<x \leqq 7$

解説

$x^2-8x+7 \leqq 0$ の解は，$(x-1)(x-7) \leqq 0$ から　　$1 \leqq x \leqq 7$　……①

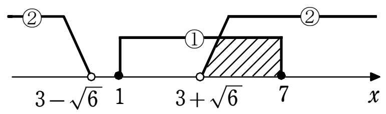
$x^2-6x+3=0$ を解くと　$x=\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-1 \cdot 3}}{1}=3 \pm \sqrt{6}$

よって，$x^2-6x+3>0$ の解は　　$x<3-\sqrt{6}$，$3+\sqrt{6}<x$　……②

①，② の共通範囲を求めると，

$3-\sqrt{6}<1<3+\sqrt{6}<7$ であるから

$3+\sqrt{6}<x \leqq 7$



3．不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-2<x<1$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-2$，$b=-2$

解説

不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-2<x<1$ であるための条件は，放物線 $y=ax^2+bx+4$ が上に凸で，x 軸と 2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わることである。

よって　　$a<0$　……①

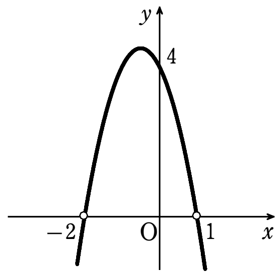
$4a-2b+4=0$　……②

$a+b+4=0$　……③

②，③ を連立して解くと

$a=-2$，$b=-2$

これは ① を満たす。



4．放物線 $y=x^2+ax+9$ と x 軸の共有点の個数が，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ。

解答　$a<-6$，$6<a$ のとき 2 個，$a=\pm 6$ のとき 1 個，$-6<a<6$ のとき 0 個

解説

$y=x^2+ax+9$ の係数について，$D=a^2-4 \cdot 1 \cdot 9=a^2-36=(a+6)(a-6)$ とする。

この符号を調べると

$a<-6$，$6<a$ のとき　$D>0$　　このとき，共有点の個数は　2 個

$a=\pm 6$ のとき　$D=0$　　このとき，共有点の個数は　1 個

$-6<a<6$ のとき　$D<0$　　このとき，共有点の個数は　0 個

5．2 次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負であるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<-1$

解説

y の値が常に負であるための条件は，関数のグラフが 常に x 軸より下側にあるための条件と同じである。したがって

x^2 の係数について　$a<0$

かつ　$4^2-4 \cdot a(a-3)<0$　……①

① から　　$-4(a^2-3a-4)<0$　　よって　　$(a+1)(a-4)>0$

ゆえに　　$a<-1$，$4<a$

これと $a<0$ との共通範囲を求めて　　$a<-1$

6．次の 2 次不等式を解け。ただし，a は定数とする。　$(x-a)(x-1)>0$

解答　$a<1$ のとき　$x<a$，$1<x$；　$a=1$ のとき　1 以外のすべての実数；

$1<a$ のとき　$x<1$，$a<x$

解説

a と 1 の大小で場合を分ける。

[1]　$a<1$ のとき　　$x<a$，$1<x$

[2]　$a=1$ のとき　　不等式は $(x-1)^2>0$ となる。

よって，求める解は　　1 以外のすべての実数

[3]　$1<a$ のとき　　$x<1$，$a<x$

7．2 次方程式 $x^2-(m-4)x+m-1=0$ が，次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる 2 つの負の解をもつ。　　(2)　正の解と負の解を 1 つずつもつ。

解答　(1)　$1<m<2$　　(2)　$m<1$

解説

$f(x)=x^2-(m-4)x+m-1$ とおく。

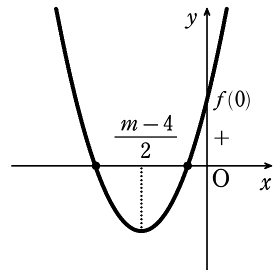
放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\frac{m-4}{2}$ である。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつことと，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることは同じである。そのための条件は，次の 3 つが同時に成り立つことである。

$\{-(m-4)\}^2-4 \cdot 1 \cdot (m-1)>0$　……①

$f(0)=m-1>0$　……②

軸について　$\frac{m-4}{2}<0$　……③



① から　　$m^2-12m+20>0$

ゆえに　　$(m-2)(m-10)>0$

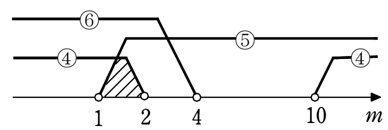
よって　　$m<2$，$10<m$　……④

② から　　$m>1$　……⑤

③ から　　$m<4$　……⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$1<m<2$

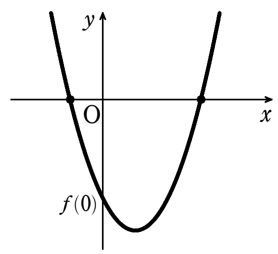


(2)　方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解を 1 つずつもつことは，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と負の部分で交わることと同じである。

そのための条件は，放物線が y 軸の負の部分と交わることである。

よって　　$f(0)<0$　すなわち　$m-1<0$

したがって　　$m<1$



8．$1 \leqq x \leqq 5$ のとき，x の関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ の最大値は ア$\boxed{}$，最小値は イ$\boxed{}$ である。

解答　（ア）3　（イ）-6

解説

$x^2-6x=t$ とおくと，関数は

$y=t^2+12t+30$ ……①

で表される。また，$1 \leqq x \leqq 5$ のとき

$t=x^2-6x=(x-3)^2-9$

から，x の関数 t のグラフは図 [1] の実線部分で，t の変域は

$-9 \leqq t \leqq -5$ ……②

よって，② における ① の最大値，最小値を求める。

① を変形すると

$y=(t+6)^2-6$

ゆえに，② における t の関数 y のグラフは図 [2] の実線部分である。

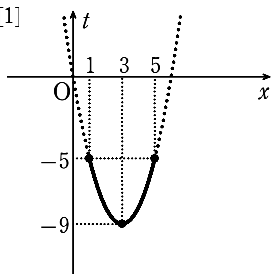
したがって，y は

$t=-9$ のとき　$x=3$ で　最大値 ア3

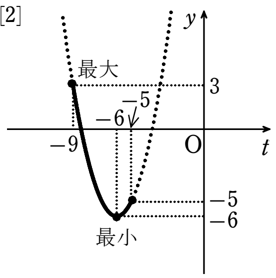
$t=-6$ のとき　$x=3\pm\sqrt{3}$ で　最小値 イ-6

をとる。

[1]



[2]



9．2 次方程式 $2x^2-3ax+a+1=0$ の 1 つの実数の解が 0 と 1 の間にあり，他の実数の解が 4 と 6 の間にある。このとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$3<a<\dfrac{73}{17}$

解説

$f(x)=2x^2-3ax+a+1$ とおくと，求める条件は，

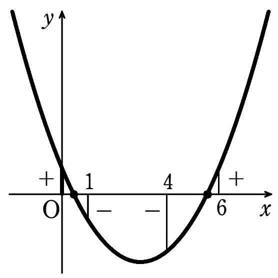
$y=f(x)$ のグラフが x 軸と $0<x<1$，$4<x<6$ の範囲で 1 つずつ共有点をもつ条件である。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は図より

$f(0)>0$　かつ　$f(1)<0$　かつ

$f(4)<0$　かつ　$f(6)>0$

である。



$f(0)>0$ から　$a+1>0$　ゆえに　$a>-1$ ……①

$f(1)<0$ から　$2\cdot 1^2-3a\cdot 1+a+1<0$

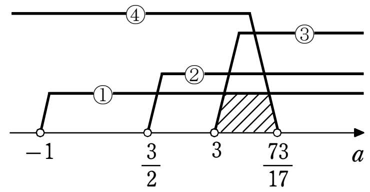
ゆえに　$a>\dfrac{3}{2}$ ……②

$f(4)<0$ から　$2\cdot 4^2-3a\cdot 4+a+1<0$

ゆえに　$a>3$ ……③

$f(6)>0$ から　$2\cdot 6^2-3a\cdot 6+a+1>0$

ゆえに　$a<\dfrac{73}{17}$ ……④



求める a の値の範囲は，① ～ ④ の共通範囲で

$3<a<\dfrac{73}{17}$