数学演習（２次不等式）Ｈ２３．６．３０　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　)

１．次の２次不等式を解け。

(1) $x^2-5x-6\geqq 0$　(2) $9x^2-4<0$　(3) $x^2-2x-1>0$

(4) $x^2+4x+1\leqq 0$　(5) $3x^2-5x-1\geqq 0$　(6) $2x^2-5x+3\leqq 0$

２．次の２次不等式を解け。

(1) $x^2+12\geqq 7x$　(2) $6(x^2-1)>5x$　(3) $2x^2-x\leqq(x-1)(x-2)$

３．次の２次不等式を解け。

(1) $(x-1)^2>0$　(2) $x^2-6x+9<0$　(3) $x^2-8x+16\geqq 0$

(4) $x^2+10x+25\leqq 0$　(5) $16x^2+1>8x$　(6) $9x^2+4\leqq 12x$

４．次の２次不等式を解け。

(1) $(x-2)^2+1>0$　(2) $x^2+4x+6<0$　(3) $3x^2+6x+4\geqq 0$

(4) $5x^2-20x+30\leqq 0$　(5) $9x^2<6x-4$　(6) $16x^2+13\geqq 24x$

５．次の２次不等式を解け。

(1) $12-x-x^2>0$　(2) $-4x^2+x+3<0$　(3) $6x-x^2\leqq 10$

６．次の条件を満たすような，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) ２次関数 $y=x^2-(m+2)x+2(m+2)$ のグラフが x 軸と共有点をもつ。

(2) ２次関数 $y=-x^2+4mx-6m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもたない。

7．次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x-24<0$　(2)　$2x^2\geqq 7x-3$　(3)　$-2x^2-3x+3\geqq 0$

(4)　$-3x^2<10-6x$　(5)　$x^2<8(x-3)$　(6)　$2(x^2+2)\leqq x(x-4)$

8．放物線 $y=x^2+ax+9$ と x 軸の共有点の個数が，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ。

9．次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+mx+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2)　2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3)　2 次方程式 $x^2-mx-m+8=0$ が実数の解をもつ。

10．次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2+ax+1$ において，y の値が常に正である。

(2)　放物線 $y=x^2-2ax+3a-2$ が $y<0$ の部分を通らない。

(3)　2 次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負である。

11．次の連立不等式を解け。

(1)　$\begin{cases} x^2-9<0 \\ 2x^2+3x>0 \end{cases}$　(2)　$\begin{cases} x^2-6x+5<0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases}$　(3)　$\begin{cases} x^2-3x\geqq 0 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} 4x\leqq x^2-5 \\ 5x^2\geqq 14x+3 \end{cases}$　(5)　$\begin{cases} x^2-4x+2>0 \\ x^2+2x-8<0 \end{cases}$　(6)　$2x+3<x^2\leqq 5$

12. 次の不等式または連立不等式を満たす整数 x の値をすべて求めよ。

(1) $x^2-2x-4<0$

(2) $\begin{cases} x^2+2x>1 \\ x^2-x<6 \end{cases}$

13. 次の 2 次不等式の解が，すべての実数となるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) $2x^2+4x+m\geqq 0$

(2) $-x^2+mx-m-1<0$

14. 次の 2 次不等式が常に成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) $x^2+(m+1)x+m^2-1>0$

(2) $(m-2)x^2-(m-2)x+m+1<0$

15. 2 次不等式 $ax^2+bx+2<0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 解が $1<x<2$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

(2) 解が $x<-1$，$2<x$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

16. 次の放物線と直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2$，$y=2x$

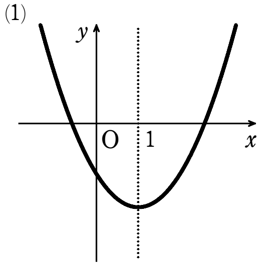
(2) $y=x^2+2x-9$，$y=3-2x$

(3) $y=x^2-4$，$y=2x-5$

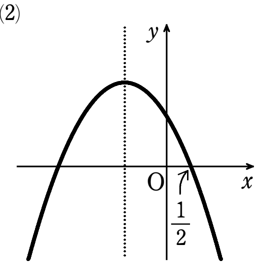
(4) $y=-x^2+4x-5$，$y=4-2x$

17. 次の図は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。それぞれの場合について，a，b，c，$a+b+c$ および b^2-4ac の符号をいえ。

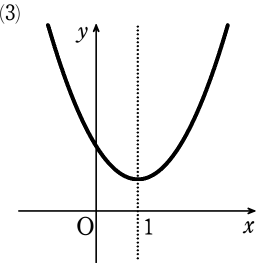
(1)



(2)



(3)



数学演習（２次不等式）Ｈ２３．６．３０　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の２次不等式を解け。

(1) $x^2-5x-6\geqq0$　(2) $9x^2-4<0$　(3) $x^2-2x-1>0$

(4) $x^2+4x+1\leqq0$　(5) $3x^2-5x-1\geqq0$　(6) $2x^2-5x+3\leqq0$

解答 (1) $x\leqq-1,\ 6\leqq x$　(2) $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$　(3) $x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$

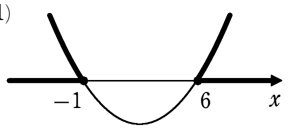
(4) $-2-\sqrt{3}\leqq x\leqq-2+\sqrt{3}$　(5) $x\leqq\frac{5-\sqrt{37}}{6},\ \frac{5+\sqrt{37}}{6}\leqq x$

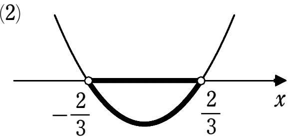
(6) $1\leqq x\leqq\frac{3}{2}$

解説

(1) $x^2-5x-6\geqq0$ から　$(x+1)(x-6)\geqq0$　よって　$x\leqq-1,\ 6\leqq x$

(2) $9x^2-4<0$ から　$(3x+2)(3x-2)<0$　よって　$-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

(1)


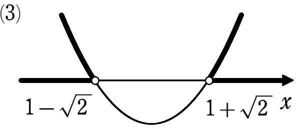
(2)


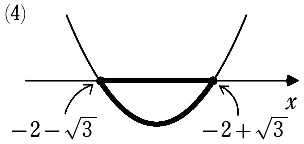
(3) $x^2-2x-1=0$ を解くと　$x=1\pm\sqrt{2}$

よって，$x^2-2x-1>0$ の解は　$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$

(4) $x^2+4x+1=0$ を解くと　$x=-2\pm\sqrt{3}$

よって，$x^2+4x+1\leqq0$ の解は　$-2-\sqrt{3}\leqq x\leqq-2+\sqrt{3}$

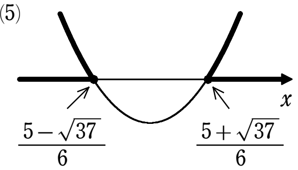
(3)


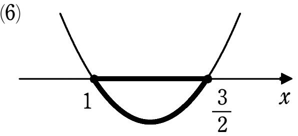
(4)


(5) $3x^2-5x-1=0$ を解くと　$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$

よって，$3x^2-5x-1\geqq0$ の解は　$x\leqq\frac{5-\sqrt{37}}{6},\ \frac{5+\sqrt{37}}{6}\leqq x$

(6) $2x^2-5x+3\leqq0$ から　$(x-1)(2x-3)\leqq0$　よって　$1\leqq x\leqq\frac{3}{2}$

(5)


(6)


2．次の２次不等式を解け。

(1) $x^2+12\geqq7x$　(2) $6(x^2-1)>5x$　(3) $2x^2-x\leqq(x-1)(x-2)$

解答 (1) $x\leqq3,\ 4\leqq x$　(2) $x<-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}<x$　(3) $-1-\sqrt{3}\leqq x\leqq-1+\sqrt{3}$

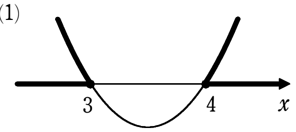
解説

(1) 移項して　$x^2-7x+12\geqq0$

ゆえに　$(x-3)(x-4)\geqq0$

よって，与えられた不等式の解は

$x\leqq3,\ 4\leqq x$

(1)


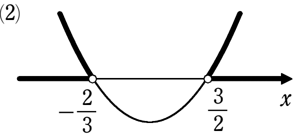
(2) 整理して　$6x^2-5x-6>0$　ゆえに　$(3x+2)(2x-3)>0$

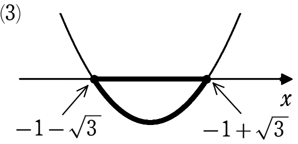
よって，与えられた不等式の解は　$x<-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}<x$

(3) 整理して　$x^2+2x-2\leqq0$

$x^2+2x-2=0$ を解くと　$x=-1\pm\sqrt{3}$

よって，与えられた不等式の解は　$-1-\sqrt{3}\leqq x\leqq-1+\sqrt{3}$

(2)


(3)


3．次の２次不等式を解け。

(1) $(x-1)^2>0$　(2) $x^2-6x+9<0$　(3) $x^2-8x+16\geqq0$

(4) $x^2+10x+25\leqq0$　(5) $16x^2+1>8x$　(6) $9x^2+4\leqq12x$

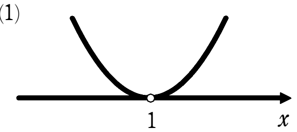
解答 (1) 1以外のすべての実数　(2) 解はない　(3) すべての実数

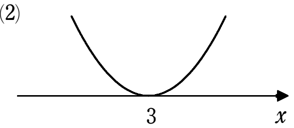
(4) $x=-5$　(5) $\frac{1}{4}$ 以外のすべての実数　(6) $x=\frac{2}{3}$

解説

(1) $(x-1)^2>0$ の解は　1以外のすべての実数。

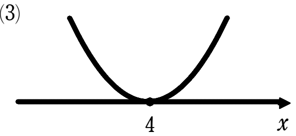
(2) $x^2-6x+9<0$ から　$(x-3)^2<0$　よって，解はない。

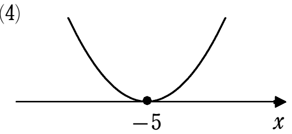
(1)


(2)


(3) $x^2-8x+16\geqq0$ から　$(x-4)^2\geqq0$　よって，解は　すべての実数

(4) $x^2+10x+25\leqq0$ から　$(x+5)^2\leqq0$　よって，解は　$x=-5$

(3)


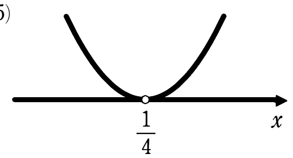
(4)


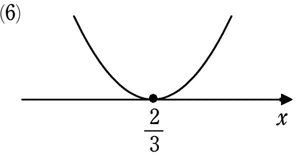
(5) 整理して　$16x^2-8x+1>0$　ゆえに　$(4x-1)^2>0$

よって，与えられた不等式の解は　$\frac{1}{4}$ 以外のすべての実数

(6) 整理して　$9x^2-12x+4\leqq0$　ゆえに　$(3x-2)^2\leqq0$

よって，与えられた不等式の解は　$x=\frac{2}{3}$

(5)


(6)


4．次の２次不等式を解け。

(1) $(x-2)^2+1>0$　(2) $x^2+4x+6<0$　(3) $3x^2+6x+4\geqq0$

(4) $5x^2-20x+30\leqq0$　(5) $9x^2<6x-4$　(6) $16x^2+13\geqq24x$

解答 (1) すべての実数　(2) 解はない　(3) すべての実数　(4) 解はない

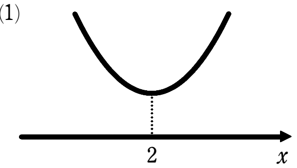
(5) 解はない　(6) すべての実数

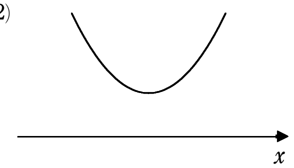
解説

(1) $(x-2)^2+1>0$ の解は　すべての実数

(2) 係数について　$4^2-4\cdot1\cdot6=-8<0$

よって，$x^2+4x+6<0$ の解はない。

(1)


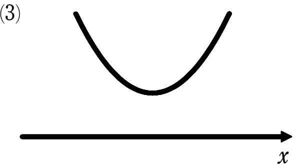
(2)


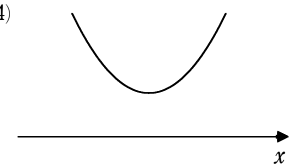
(3) 係数について　$6^2-4\cdot3\cdot4=-12<0$

よって，$3x^2+6x+4\geqq0$ の解は　すべての実数

(4) 係数について　$(-20)^2-4\cdot5\cdot30=-200<0$

よって，$5x^2-20x+30\leqq0$ の解はない。

(3)


(4)


(5) 整理すると　$9x^2-6x+4<0$

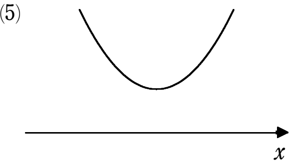
係数について　$(-6)^2-4\cdot9\cdot4=-108<0$

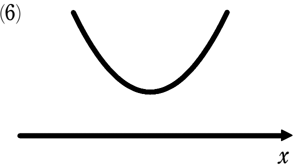
よって，与えられた不等式の解はない。

(6) 整理すると　$16x^2-24x+13\geqq0$

係数について　$(-24)^2-4\cdot16\cdot13=8^2(3^2-13)<0$

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数

(5)


(6)


5．次の２次不等式を解け。

(1) $12-x-x^2>0$　(2) $-4x^2+x+3<0$　(3) $6x-x^2\leqq10$

解答 (1) $-4<x<3$　(2) $x<-\frac{3}{4},\ 1<x$　(3) すべての実数

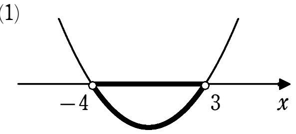
解説

(1) 両辺に -1 をかけて　$x^2+x-12<0$

ゆえに　$(x+4)(x-3)<0$

よって，与えられた不等式の解は

$-4<x<3$

(1)


(2)　両辺に -1 をかけて　　$4x^2-x-3>0$　　ゆえに　$(4x+3)(x-1)>0$

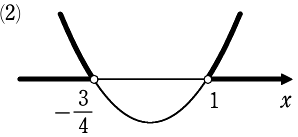
よって，与えられた不等式の解は　$x<-\dfrac{3}{4}$，$1<x$

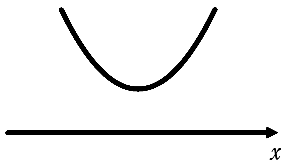
(3)　整理して　$-x^2+6x-10\leqq 0$

両辺に -1 をかけて　$x^2-6x+10\geqq 0$

係数について　$(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10=-4<0$

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数

(2)


(3)


6．次の条件を満たすような，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2-(m+2)x+2(m+2)$ のグラフが x 軸と共有点をもつ。

(2)　2 次関数 $y=-x^2+4mx-6m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもたない。

解答　(1)　$m\leqq -2$，$6\leqq m$　　(2)　$\dfrac{1}{2}<m<1$

解説

(1)　与えられた 2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，係数について

$\{-(m+2)\}^2-4\cdot 1\cdot 2(m+2)\geqq 0$　　すなわち　$(m+2)(m-6)\geqq 0$

よって，求める m の値の範囲は　$m\leqq -2$，$6\leqq m$

(2)　x^2 の係数は -1 であるから，グラフは上に凸の放物線である。

よって，与えられた 2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は，係数について　$(4m)^2-4\cdot(-1)\cdot(-6m+2)<0$

すなわち　$8(2m^2-3m+1)<0$

よって　$8(2m-1)(m-1)<0$　　ゆえに　$\dfrac{1}{2}<m<1$

7．次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x-24<0$　　(2)　$2x^2\geqq 7x-3$　　(3)　$-2x^2-3x+3\geqq 0$

(4)　$-3x^2<10-6x$　　(5)　$x^2<8(x-3)$　　(6)　$2(x^2+2)\leqq x(x-4)$

解答　(1)　$-4<x<6$　　(2)　$x\leqq\dfrac{1}{2}$，$3\leqq x$　　(3)　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}$

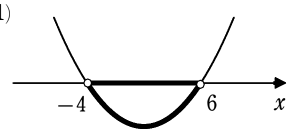
(4)　すべての実数　　(5)　解はない　　(6)　$x=-2$

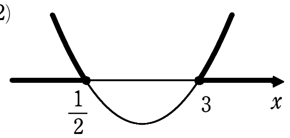
解説

(1)　$x^2-2x-24<0$ から　$(x+4)(x-6)<0$　　よって　$-4<x<6$

(2)　整理すると　$2x^2-7x+3\geqq 0$　　ゆえに　$(2x-1)(x-3)\geqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　$x\leqq\dfrac{1}{2}$，$3\leqq x$

(1)


(2)


(3)　両辺に -1 をかけて　$2x^2+3x-3\leqq 0$

$2x^2+3x-3=0$ を解くと　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

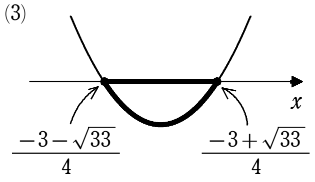
よって，与えられた不等式の解は　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}$

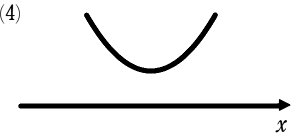
(4)　整理すると　$-3x^2+6x-10<0$

両辺に -1 をかけて　$3x^2-6x+10>0$

係数について　$(-6)^2-4\cdot 3\cdot 10=-84<0$

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数

(3)


(4)


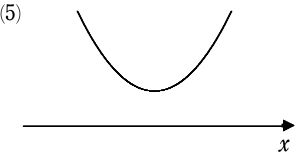
(5)　整理すると　$x^2-8x+24<0$

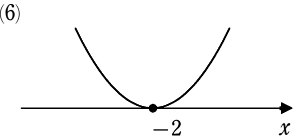
係数について　$(-8)^2-4\cdot 1\cdot 24=-32<0$

よって，与えられた不等式の解はない。

(6)　整理すると　$x^2+4x+4\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)^2\leqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　$x=-2$

(5)


(6)


8．放物線 $y=x^2+ax+9$ と x 軸の共有点の個数が，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ。

解答　$a<-6$，$6<a$ のとき 2 個，$a=\pm 6$ のとき 1 個，$-6<a<6$ のとき 0 個

解説

$y=x^2+ax+9$ の係数について，$D=a^2-4\cdot 1\cdot 9=a^2-36=(a+6)(a-6)$ とする。

この符号を調べると

$a<-6$，$6<a$ のとき　$D>0$　　このとき，共有点の個数は　2 個

$a=\pm 6$ のとき　$D=0$　　このとき，共有点の個数は　1 個

$-6<a<6$ のとき　$D<0$　　このとき，共有点の個数は　0 個

9．次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+mx+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2)　2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3)　2 次方程式 $x^2-mx-m+8=0$ が実数の解をもつ。

解答　(1)　$m<0$，$4<m$　　(2)　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$　　(3)　$m\leqq -8$，$4\leqq m$

解説

(1)　この方程式が異なる 2 つの実数の解をもつための条件は，係数について

$m^2-4\cdot 1\cdot m>0$　　すなわち　$m(m-4)>0$

よって，求める m の値の範囲は　$m<0$，$4<m$

(2)　この方程式が実数の解をもたないための条件は，係数について

$(m-1)^2-4\cdot 1\cdot(2m-1)<0$　　すなわち　$m^2-10m+5<0$

$m^2-10m+5=0$ を解くと　$m=5\pm 2\sqrt{5}$

よって，求める m の値の範囲は　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

(3)　この方程式が実数の解をもつための条件は，係数について

$(-m)^2-4\cdot 1\cdot(-m+8)\geqq 0$　　すなわち　$m^2+4m-32\geqq 0$

ゆえに　$(m+8)(m-4)\geqq 0$

よって，求める m の値の範囲は　$m\leqq -8$，$4\leqq m$

10．次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2+ax+1$ において，y の値が常に正である。

(2)　放物線 $y=x^2-2ax+3a-2$ が $y<0$ の部分を通らない。

(3)　2 次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負である。

解答　(1)　$-2<a<2$　　(2)　$1\leqq a\leqq 2$　　(3)　$a<-1$

解説

(1)　x^2 の係数は正であるから，この関数のグラフは下に凸の放物線である。

よって，y の値が常に正であるための条件は，放物線が x 軸と共有点をもたないこと，すなわち

$a^2-4\cdot 1\cdot 1<0$　　ゆえに　$a^2-4<0$

これを解いて　$-2<a<2$

(2)　x^2 の係数は正であるから，この放物線は下に凸である。

よって，$y<0$ の部分を通らないための条件は，放物線が x 軸と共有点をもたないか，接すること，すなわち

$(-2a)^2-4\cdot 1\cdot(3a-2)\leqq 0$　　ゆえに　$4(a^2-3a+2)\leqq 0$

よって　$4(a-1)(a-2)\leqq 0$　　したがって　$1\leqq a\leqq 2$

(3)　y の値が常に負であるための条件は，関数のグラフが 常に x 軸より下側にあるための条件と同じである。したがって

x^2 の係数について　$a<0$

かつ　$4^2-4\cdot a(a-3)<0$　……①

① から　$-4(a^2-3a-4)<0$　　よって　$(a+1)(a-4)>0$

ゆえに　$a<-1$，$4<a$

これと $a<0$ との共通範囲を求めて　$a<-1$

11．次の連立不等式を解け。

(1)　$\begin{cases}x^2-9<0\\2x^2+3x>0\end{cases}$　　(2)　$\begin{cases}x^2-6x+5<0\\x^2-7x+12>0\end{cases}$　　(3)　$\begin{cases}x^2-3x\geqq 0\\x^2-5x+4>0\end{cases}$

(4)　$\begin{cases}4x\leqq x^2-5\\5x^2\geqq 14x+3\end{cases}$　　(5)　$\begin{cases}x^2-4x+2>0\\x^2+2x-8<0\end{cases}$　　(6)　$2x+3<x^2\leqq 5$

解答　(1)　$-3<x<-\dfrac{3}{2}$，$0<x<3$　　(2)　$1<x<3$，$4<x<5$　　(3)　$x\leqq 0$，$4<x$

(4)　$x\leqq -1$，$5\leqq x$　　(5)　$-4<x<2-\sqrt{2}$　　(6)　$-\sqrt{5}\leqq x<-1$

解説

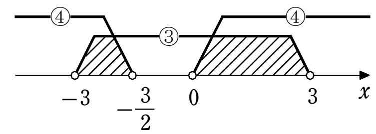
(1)　$\begin{cases}x^2-9<0 & \cdots\cdots ①\\2x^2+3x>0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$(x+3)(x-3)<0$　　ゆえに　$-3<x<3$　……③

② から　$x(2x+3)>0$　　ゆえに　$x<-\dfrac{3}{2}$，$0<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-3<x<-\dfrac{3}{2}$，$0<x<3$



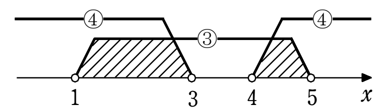
(2)　$\begin{cases}x^2-6x+5<0 & \cdots\cdots ①\\x^2-7x+12>0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$(x-1)(x-5)<0$　　ゆえに　$1<x<5$　……③

② から　$(x-3)(x-4)>0$　　ゆえに　$x<3$，$4<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$1<x<3$，$4<x<5$



(3)　$\begin{cases}x^2-3x\geqq 0 & \cdots\cdots ①\\x^2-5x+4>0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x(x-3)\geqq 0$　　ゆえに　$x\leqq 0$，$3\leqq x$　……③

② から　$(x-1)(x-4)>0$　　ゆえに　$x<1,\ 4<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$x \leqq 0,\ 4<x$

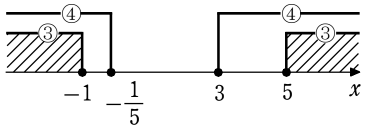
(4) $\begin{cases} 4x \leqq x^2-5 & \cdots\cdots ① \\ 5x^2 \geqq 14x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-4x-5 \geqq 0$　　よって　$(x+1)(x-5) \geqq 0$

ゆえに　$x \leqq -1,\ 5 \leqq x$　……③

② から　$5x^2-14x-3 \geqq 0$　　よって　$(5x+1)(x-3) \geqq 0$

ゆえに　$x \leqq -\dfrac{1}{5},\ 3 \leqq x$　……④



③ と ④ の共通範囲を求めて

$x \leqq -1,\ 5 \leqq x$

(5) $\begin{cases} x^2-4x+2>0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+2x-8<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

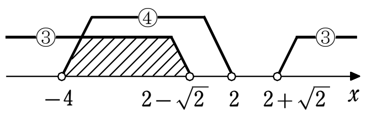
$x^2-4x+2=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{2}$

よって，① の解は　$x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$　……③

② から　$(x+4)(x-2)<0$　　ゆえに　$-4<x<2$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-4<x<2-\sqrt{2}$



(6) $\begin{cases} 2x+3<x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2 \leqq 5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-2x-3>0$　　よって　$(x+1)(x-3)>0$

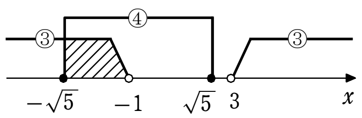
ゆえに　$x<-1,\ 3<x$　……③

② から　$x^2-5 \leqq 0$　　$x^2-5=0$ を解くと　$x=\pm\sqrt{5}$

よって，② の解は　$-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5}$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-\sqrt{5} \leqq x < -1$



12. 次の不等式または連立不等式を満たす整数 x の値をすべて求めよ。

(1)　$x^2-2x-4<0$　　　(2)　$\begin{cases} x^2+2x>1 \\ x^2-x<6 \end{cases}$

解答　(1)　$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$　　(2)　$x=1,\ 2$

解説

(1)　$x^2-2x-4=0$ を解くと　$x=1\pm\sqrt{5}$

よって，$x^2-2x-4<0$ の解は　$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$

ここで，$2<\sqrt{5}<3$ より，$-3<-\sqrt{5}<-2$ であるから

$-2<1-\sqrt{5}<-1,\quad 3<1+\sqrt{5}<4$

したがって，求める整数 x の値は　$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(2) $\begin{cases} x^2+2x>1 & \cdots\cdots ① \\ x^2-x<6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2+2x-1>0$　　$x^2+2x-1=0$ を解くと　$x=-1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，① の解は　$x<-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}<x$　……③

② から　$x^2-x-6<0$　　よって　$(x+2)(x-3)<0$

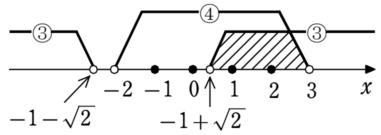
ゆえに　$-2<x<3$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-1+\sqrt{2}<x<3$

$\sqrt{2}=1.4\cdots\cdots$ で，x は整数であるから

$x=1,\ 2$



別解　④ を満たす整数 $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$ について，

$x=-1$ のとき　$x^2+2x=-1<1$

$x=0$　のとき　$x^2+2x=0<1$

$x=1$　のとき　$x^2+2x=3>1$　　よって，$x=1$ は ① を満たす。

$x=2$　のとき　$x^2+2x=8>1$　　よって，$x=2$ は ① を満たす。

したがって，求める整数 x の値は　$x=1,\ 2$

13. 次の 2 次不等式の解が，すべての実数となるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　$2x^2+4x+m \geqq 0$　　　(2)　$-x^2+mx-m-1<0$

解答　(1)　$m \geqq 2$　　(2)　$2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}$

解説

(1)　2 次不等式 $2x^2+4x+m \geqq 0$ の解が，すべての実数となるための条件は，2 次関数 $y=2x^2+4x+m$ のグラフが常に x 軸の上側にある，またはグラフが x 軸と接することであるから，係数について

$4^2-4\cdot 2m \leqq 0$　　すなわち　$8(2-m) \leqq 0$

よって，求める m の値の範囲は　$m \geqq 2$

(2)　2 次不等式 $-x^2+mx-m-1<0$ の解が，すべての実数となるための条件は，2 次関数 $y=-x^2+mx-m-1$ のグラフが常に x 軸の下側にあることであるから，係数について

$m^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-1)<0$　　すなわち　$m^2-4m-4<0$

$m^2-4m-4=0$ を解くと　$m=2\pm2\sqrt{2}$

よって，求める m の値の範囲は　$2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}$

14. 次の 2 次不等式が常に成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　$x^2+(m+1)x+m^2-1>0$　　　(2)　$(m-2)x^2-(m-2)x+m+1<0$

解答　(1)　$m<-1,\ \dfrac{5}{3}<m$　　(2)　$m<-2$

解説

(1)　2 次不等式 $x^2+(m+1)x+m^2-1>0$ が常に成り立つのは，2 次関数 $y=x^2+(m+1)x+m^2-1$ のグラフが常に x 軸より上方にあるときである。

その条件は　$(m+1)^2-4\cdot1\cdot(m^2-1)<0$

すなわち　$-3m^2+2m+5<0$　　ゆえに　$(m+1)(3m-5)>0$

よって，求める m の値の範囲は　$m<-1,\ \dfrac{5}{3}<m$

(2)　2 次不等式 $(m-2)x^2-(m-2)x+m+1<0$ が常に成り立つのは，2 次関数 $y=(m-2)x^2-(m-2)x+m+1$ のグラフが上に凸で，x 軸と共有点をもたないときであるから，その条件は

$m-2<0$　……①　かつ

$\{-(m-2)\}^2-4\cdot(m-2)\cdot(m+1)<0$　……②

① から　$m<2$　……③

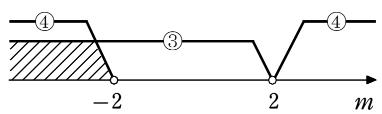
② から　$(m-2)(-3m-6)<0$

ゆえに　$3(m+2)(m-2)>0$

よって　$m<-2,\ 2<m$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$m<-2$



15. 2 次不等式 $ax^2+bx+2<0$ について，次の問いに答えよ。

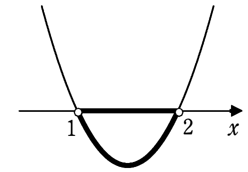
(1)　解が $1<x<2$ であるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

(2)　解が $x<-1,\ 2<x$ であるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

解答　(1)　$a=1,\ b=-3$　　(2)　$a=-1,\ b=1$

解説

(1)　条件から，$y=ax^2+bx+2$ のグラフは $1<x<2$ の範囲で x 軸より下方にある。すなわち，下に凸である放物線で，2 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから



$a>0$　……①

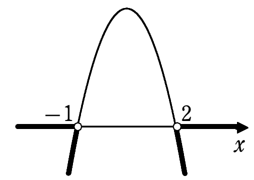
$a+b+2=0$　……②

$4a+2b+2=0$　……③

②，③ を連立して解くと

$a=1,\ b=-3$　　これは ① を満たす。

(2)　条件から，$y=ax^2+bx+2$ のグラフは $x<-1,\ 2<x$ の範囲で x 軸より下方にある。すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから



$a<0$　……①

$a-b+2=0$　……②

$4a+2b+2=0$　……③

②，③ を連立して解くと

$a=-1,\ b=1$　　これは ① を満たす。

16. 次の放物線と直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2,\ y=2x$　　　(2)　$y=x^2+2x-9,\ y=3-2x$

(3)　$y=x^2-4,\ y=2x-5$　　　(4)　$y=-x^2+4x-5,\ y=4-2x$

解答　(1)　$(0,\ 0)$，$(2,\ 4)$　　(2)　$(-6,\ 15)$，$(2,\ -1)$　　(3)　$(1,\ -3)$　　(4)　$(3,\ -2)$

解説

(1) $\begin{cases} y=x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=2x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② から y を消去すると　$x^2=2x$

移項して　$x^2-2x=0$　　よって　$x(x-2)=0$　　ゆえに　$x=0,\ 2$

② から　$x=0$ のとき $y=0$，　$x=2$ のとき $y=4$

したがって，共有点の座標は　$(0,\ 0)$，$(2,\ 4)$

(2) $\begin{cases} y=x^2+2x-9 & \cdots\cdots ① \\ y=3-2x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② から y を消去すると　$x^2+2x-9=3-2x$

整理して　$x^2+4x-12=0$　　よって　$(x+6)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=-6,\ 2$

② から　$x=-6$ のとき $y=15$，　$x=2$ のとき $y=-1$

したがって，共有点の座標は　$(-6,\ 15)$，$(2,\ -1)$

(3) $\begin{cases} y=x^2-4 & \cdots\cdots ① \\ y=2x-5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② から y を消去すると　$x^2-4=2x-5$

整理して　$x^2-2x+1=0$　　よって　$(x-1)^2=0$　　ゆえに　$x=1$

このとき，② から　$y=-3$

したがって，共有点の座標は　$(1,\ -3)$

(4) $\begin{cases} y=-x^2+4x-5 & \cdots\cdots ① \\ y=4-2x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

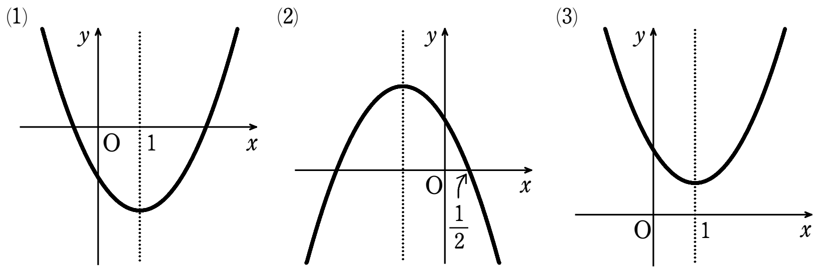
①，② から y を消去すると　$-x^2+4x-5=4-2x$

整理して　$x^2-6x+9=0$　　よって　$(x-3)^2=0$　　ゆえに　$x=3$

このとき，② から　　$y=-2$

したがって，共有点の座標は　$(3,\ -2)$

17. 次の図は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。それぞれの場合について，a，b，c，$a+b+c$ および b^2-4ac の符号をいえ。



解答　(1)　$a>0$，$b<0$，$c<0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac>0$

(2)　$a<0$，$b<0$，$c>0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac>0$

(3)　$a>0$，$b<0$，$c>0$，$a+b+c>0$，$b^2-4ac<0$

解説

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　y 軸との交点の座標は　$(0,\ c)$

また，$x=1$ のとき　　$y=a+b+c$

(1)　グラフは下に凸であるから　$a>0$

軸は $x>0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$　　ここで $a>0$ であるから　$b<0$

y 軸と負の部分で交わるから　$c<0$

$x=1$ のとき $y<0$ であるから　　$a+b+c<0$

グラフは x 軸と異なる 2 点で交わるから　　$b^2-4ac>0$

(2)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

軸は $x<0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}<0$　　ここで $a<0$ であるから　$b<0$

y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

$x=1$ のとき $y<0$ であるから　　$a+b+c<0$

グラフは x 軸と異なる 2 点で交わるから　　$b^2-4ac>0$

(3)　グラフは下に凸であるから　$a>0$

軸は $x>0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$　　ここで $a>0$ であるから　$b<0$

y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

$x=1$ のとき $y>0$ であるから　　$a+b+c>0$

グラフは x 軸と共有点をもたないから　　$b^2-4ac<0$