数学演習（２次関数･２次方程式）Ｈ２５．７．１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

１．関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が５，最小値が -4 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

２．次の２次関数のグラフをかけ。また，軸と頂点を求めよ。　$y=-\frac{1}{3}x^2-2x$

３．ある放物線を x 軸方向に１，y 軸方向に -2 だけ平行移動した後，x 軸に関して対称移動したところ，放物線 $y=-x^2-3x+3$ となった。もとの放物線の方程式を求めよ。

４．関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値とそのときのxの値を次の場合について求めよ。

(1)　$0<a<1$　　(2)　$1\leqq a$

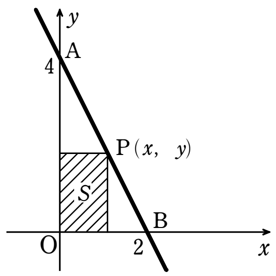
５．a を実数として，$a\leqq x\leqq a+2$ で定義される関数 $f(x)=x^2-2x+3$ について考える。

(1)　最小値mをaで表せ。　　(2)　最大値Mをaで表せ。

６. 右の図のように，直線 $2x+y=4$ 上において２点 A，B の間を点 P$(x,\ y)$ が動くとする。

(1) 斜線で示した長方形の面積 S を x で表せ。

(2) S の最大値およびそのときの点 P の座標を求めよ。



７. そのグラフが，放物線 $y=-2x^2+6x-3$ を平行移動したもので，２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通る２次関数を求めよ。

８. 放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動したもので，点 $(1,\ 3)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の式を求めよ。

９. (1) ２次方程式 $2x^2+3x+k=0$ の実数の解の個数を調べよ。

(2) ２次方程式 $4x^2+2(a-1)x+1-a=0$ が重解をもつように定数 a の値を定め，そのときの重解を求めよ。

数学演習（２次関数･２次方程式）Ｈ２５．７．１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が５，最小値が -4 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=3,\ b=-1$　または　$a=-3,\ b=2$

解説

● $a>0$ のとき，この関数のグラフは右上がりの線分である。

よって，$x=-1$ で最小値 -4，$x=2$ で最大値５をとる。

したがって　$\begin{cases} -a+b=-4 & \cdots\cdots ① \\ 2a+b=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②−① から　$3a=9$　　よって　$a=3$　　これは $a>0$ を満たす。

① から　$b=-4+a=-4+3=-1$

したがって　$a=3,\ b=-1$

● $a<0$ のとき，この関数のグラフは右下がりの線分である。

よって，$x=-1$ で最大値５，$x=2$ で最小値 -4 をとる。

したがって　$\begin{cases} -a+b=5 & \cdots\cdots ① \\ 2a+b=-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②−① から　$3a=-9$　　よって　$a=-3$　　これは $a<0$ を満たす。

① から　$b=5+a=5+(-3)=2$

したがって　$a=-3,\ b=2$

● $a=0$のとき，この関数のグラフはx軸に平行な線分である。

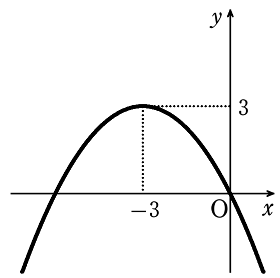
したがって，最大値が5で最小値が-4となることはありえない。ゆえに，$a=0$は不適

以上より，$a=3,\ b=-1$　または　$a=-3,\ b=2$

２．次の２次関数のグラフをかけ。また，軸と頂点を求めよ。　$y=-\dfrac{1}{3}x^2-2x$

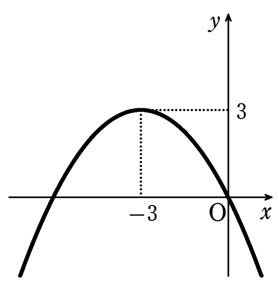
解答　軸は$x=-3$

頂点は$(-3,3)$



解説

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{3}x^2-2x \\ &=-\frac{1}{3}(x^2+6x) \\ &=-\frac{1}{3}\{(x+3)^2-9\} \\ &=-\frac{1}{3}(x+3)^2+\frac{1}{3}\cdot 9 \\ &=-\frac{1}{3}(x+3)^2+3 \end{aligned}$$



グラフは[図]。頂点は　点$(-3,\ 3)$

軸は　直線 $x=-3$

３．ある放物線を x 軸方向に１，y 軸方向に -2 だけ平行移動した後，x 軸に関して対称移動したところ，放物線 $y=-x^2-3x+3$ となった。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2+5x+3$

解説

$y=-x^2-3x+3$に至った移動を巻き戻しにして，元の放物線の方程式を求める。

放物線 $y=-x^2-3x+3$ を x 軸に関して対称移動し直すと

$$y=-(-x^2-3x+3)=x^2+3x-3$$

さらにこの放物線を x 軸方向に -1，y 軸方向に２だけ平行移動して戻したものがもとの放物線である。

ゆえに，求める方程式は

$$y=\{x-(-1)\}^2+3\{x-(-1)\}-3+2=(x+1)^2+3(x+1)-1$$

すなわち　$y=x^2+5x+3$

別解　もとの放物線の頂点を $(p,\ q)$ とすると，もとの放物線は $y=(x-p)^2+q$ と表される。

点 $(p,\ q)$ が x 軸方向に１，y 軸方向に -2 だけ移動し，更に x 軸に関して対称移動すると　　$(p,\ q)\longrightarrow(p+1,\ q-2)\longrightarrow(p+1,\ -(q-2))$

ゆえに，点 $(p+1,\ -q+2)$ に移る。

これが，放物線 $y=-x^2-3x+3$　すなわち　$y=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{21}{4}$ の頂点

$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{21}{4}\right)$ と一致するから

$$p+1=-\frac{3}{2},\qquad -q+2=\frac{21}{4}$$

すなわち　$p=-\dfrac{5}{2},\ q=-\dfrac{13}{4}$

よって，もとの放物線の方程式は

$$y=\left\{x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}^2-\frac{13}{4}\quad \text{すなわち}\quad y=x^2+5x+3$$

４．関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値とそのときのxの値を次の場合について求めよ。

(1)　$0<a<1$　　　　(2)　$1\leqq a$

解答　(1)　$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$，(2)　$x=2$ で最大値 $7a-4$

解説

$$\begin{aligned} y&=-x^2+4ax-a \\ &=-(x-2a)^2+(2a)^2-a \\ &=-(x-2a)^2+4a^2-a \end{aligned}$$

この関数のグラフの軸は　直線 $x=2a$

(1)　$0<a<1$ のとき，左辺･中央･右辺をすべて2倍して　$0<2a<2$

これは，軸$x=2a$が$x=0$と$x=2$の間にあることを意味する。

つまり，軸が定義域$0\leqq x\leqq 2$の中に入ってくるので，軸$x=2a$で最大

$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$

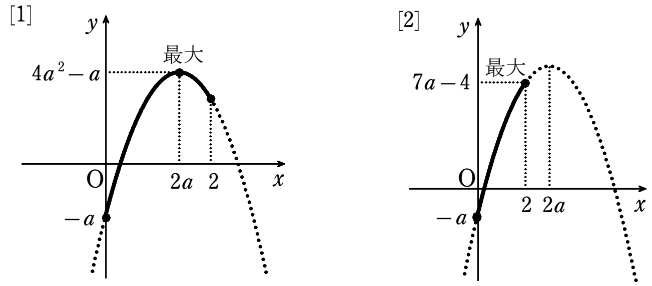
(2)　$1\leqq a$ のとき，両辺を2倍して　$2\leqq 2a$

軸$x=2a$が定義域の右端$x=2$よりも右側にあることを意味する。

つまり，定義域内では単調増加であるから$x=2$で最大

$x=2$を代入して$y=-2^2+4a\cdot 2-a=7a-4$

ゆえに　$x=2$ で最大値 $7a-4$



５．a を実数として，$a\leqq x\leqq a+2$ で定義される関数 $f(x)=x^2-2x+3$ について考える。

(1)　最小値mをaで表せ。　　　　(2)　最大値Mをaで表せ。

解答　(1)　$a<-1$ のとき $m=a^2+2a+3$，$-1\leqq a\leqq 1$ のとき $m=2$，

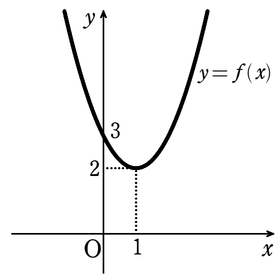
$1<a$ のとき $m=a^2-2a+3$

(2)　$a<0$ のとき $M=a^2-2a+3$，$0\leqq a$ のとき $M=a^2+2a+3$

解説

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。



また　　$f(a)=a^2-2a+3$

$$\begin{aligned} f(a+2)&=(a+2)^2-2(a+2)+3 \\ &=a^2+2a+3 \end{aligned}$$

(1)　最小値m について

放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=1$ であるから，

次の図より

[1]　軸$x=1$が定義域よりも右側にくるとき

軸$x=1$は定義域右端の$x=a+2$よりも

さらに右側にあるので　$a+2<1$

すなわち　$a<-1$ のとき，

$x=a+2$ で最小となり

$$m=f(a+2)=a^2+2a+3$$

[2]　軸$x=1$が定義域の中にくるとき

軸$x=1$は定義域左端の$x=a$よりも右で，定義域右端の$x=a+2$よりも左より

$a\leqq 1\leqq a+2$　すなわち　$a\leqq 1$　かつ　$1\leqq a+2$，

つまり　$a\leqq 1$　かつ　$-1\leqq a$　なので　　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき，

軸の$x=1$ で最小となり

$$m=f(1)=2$$

[3]　軸$x=1$が定義域よりも左側にくるとき

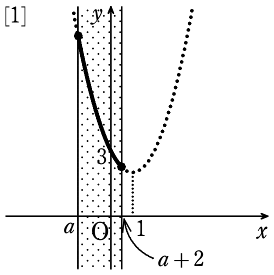
軸$x=1$は定義域左端の$x=a$よりも

さらに左側にあるので　$1<a$　となる。

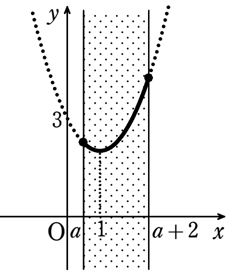
このとき　$x=a$ で最小となり

$$m=f(a)=a^2-2a+3$$

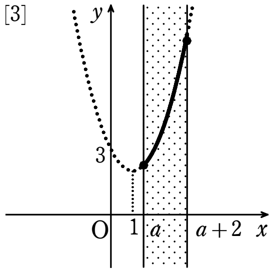
[1]



[2]



[3]



(2) 最大値Mについて

定義域$a \leqq x \leqq a+2$の中央は$x=a+1$

中央$x=a+1$が軸の右側と左側で場合分け

よって，求める M は，下の図から

[1] 定義域中央$x=a+1$ が軸$x=1$の左側にあるとき，

つまり $a+1<1$ より $a<0$のとき

このときグラフから，$x=a$ で最大となり

$$M=f(a)=a^2-2a+3$$

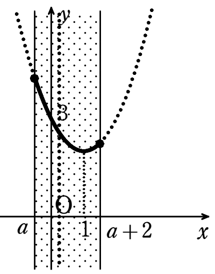
[2] 定義域中央$x=a+1$ が軸$x=1$の右側にあるとき，

つまり $1 \leqq a+1$ より $0 \leqq a$のとき

このとき，$x=a+2$ で最大となり

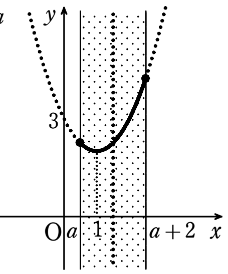
$$M=f(a+2)=a^2+2a+3$$

$a<0$



中央（点線）

$0 \leqq a$



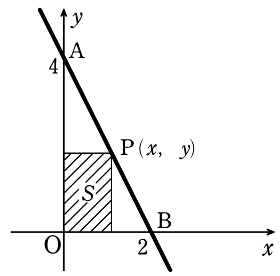
中央（点線）

参考 この問題に限って，最大となるときのxの値を求めよとは言われてないので，軸と定義域中央が一致するとき，つまり，定義域の両端が同じ高さになるときはあえて考えなくても良く，どちらかの場合に混ぜてしまえばいい。

6．右の図のように，直線 $2x+y=4$ 上において 2 点 A，B の間を点 P$(x,\ y)$ が動くとする。

(1) 斜線で示した長方形の面積 S を x で表せ。

(2) S の最大値およびそのときの点 P の座標を求めよ。



解答 (1) $S=-2x^2+4x\ (0<x<2)$

(2) $x=1$ のとき最大値 2，P の座標 $(1,\ 2)$

解説

(1) $2x+y=4$ から $y=4-2x$

よって $S=xy=x(4-2x)=-2x^2+4x$

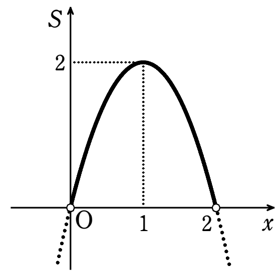
x の値の範囲は $0<x<2$

(2) $S=-2x^2+4x$

$=-2(x^2-2x)$

$=-2(x-1)^2+2$

よって，関数 $S=-2x^2+4x\ (0<x<2)$ のグラフは右の図の実線部分である。



したがって，S は $x=1$ のとき最大値 2 をとる。

このとき $y=4-2\cdot1=2$

ゆえに，点 P の座標は $(1,\ 2)$

7．そのグラフが，放物線 $y=-2x^2+6x-3$ を平行移動したもので，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通る 2 次関数を求めよ。

解答 $y=-2x^2+2x+4$

解説

求める 2 次関数は $y=-2x^2+bx+c$ とおける。

このグラフが 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$$-2-b+c=0,\quad -8+2b+c=0$$

これを解くと $b=2,\ c=4$

よって，求める 2 次関数は $y=-2x^2+2x+4$

別解 グラフが x 軸上の 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから，求める 2 次関数は

$y=-2(x+1)(x-2)$ すなわち $y=-2x^2+2x+4$

8．放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動したもので，点 $(1,\ 3)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の式を求めよ。

解答 $y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$

解説

頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，頂点のx座標をpとすると，y座標は$y=2p-3$

つまり，頂点の座標は $(p,\ 2p-3)$ とおける。

また，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動したものであるから，x^2の係数は2のまま

もとめる放物線の方程式は

$$y=2(x-p)^2+2p-3 \quad \cdots\cdots ①$$

とおける。

このグラフが点 $(1,\ 3)$ を通るから $3=2(1-p)^2+2p-3$

整理して $p^2-p-2=0$ よって $(p+1)(p-2)=0$

したがって $p=-1,\ 2$

① に代入して $y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$

9．(1) 2 次方程式 $2x^2+3x+k=0$ の実数の解の個数を調べよ。

(2) 2 次方程式 $4x^2+2(a-1)x+1-a=0$ が重解をもつように定数 a の値を定め，そのときの重解を求めよ。

解答 (1) $k<\dfrac{9}{8}$ のとき 2 個，$k=\dfrac{9}{8}$ のとき 1 個，$k>\dfrac{9}{8}$ のとき 0 個

(2) $a=1$ のとき重解 $x=0$，$a=-3$ のとき重解 $x=1$

解説

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$D=b^2-4ac$ とする。

(1) $D=3^2-4\cdot2\cdot k=9-8k$ であるから

$9-8k>0$ すなわち $k<\dfrac{9}{8}$ のとき 実数の解は 2 個

$9-8k=0$ すなわち $k=\dfrac{9}{8}$ のとき 実数の解は 1 個

$9-8k<0$ すなわち $k>\dfrac{9}{8}$ のとき 実数の解は 0 個

(2) $\dfrac{D}{4}=(b')^2-ac=(a-1)^2-4(1-a)=a^2+2a-3=(a-1)(a+3)$

与えられた 2 次方程式が重解をもつための条件は

$$D=0 \quad すなわち \quad \frac{D}{4}=0$$

よって $(a-1)(a+3)=0$

ゆえに $a=1,\ -3$

$a=1$ のとき，重解は $x=-\dfrac{b'}{a}$ より $x=-\dfrac{a-1}{4}=0$

$a=-3$ のとき，重解は $x=-\dfrac{b'}{a}$ より $x=-\dfrac{a-1}{4}=1$