数学演習（２次関数･２次関数の最大最小･２次関数の決定･２次方程式）Ｈ２５．６．２４　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．2 つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ の頂点が一致するように，定数 a，b の値を定めよ。

２．放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=2x^2-3x+1$ になる。係数 a，b，c の値を求めよ。

３．関数 $y=ax^2+2ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 5，最小値が -3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a<0$ とする。

４．$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$3x+y=8$ のとき，xy の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

５．a は正の定数，関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最小値を m とする。

(1)　m を a を用いて表せ。

(2)　$m=5$ のとき，a の値を求めよ。

6．関数 $y=x^2-4x+1$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値，最小値を，次の (1)～(5) の場合について求めよ。

(1)　$a \leqq 1$　(2)　$1 < a < \dfrac{3}{2}$　(3)　$a=\dfrac{3}{2}$　(4)　$\dfrac{3}{2} < a < 2$　(5)　$2 \leqq a$

7．グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　直線 $x=1$ を軸とし，2 点 $(3,\ -1)$，$(0,\ 2)$ を通る。

(2)　3 点 $(1,\ 12)$，$(-1,\ 4)$，$(-2,\ 9)$ を通る。

8．次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2)　2 次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3)　2 次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数の解をもつ。

１．2 つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ の頂点が一致するように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-\frac{3}{2}$，$b=-\frac{9}{8}$

解説

$y=x^2-3x$ を変形すると　　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$　　……①

$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ を変形すると　　$y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{a^2}{2}+b$　……②

よって，①，② の頂点の座標はそれぞれ　$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$，$\left(-a,\ -\frac{a^2}{2}+b\right)$

この 2 点が一致するための条件は

$\frac{3}{2}=-a$　……③，$-\frac{9}{4}=-\frac{a^2}{2}+b$　……④

③ から　$a=-\frac{3}{2}$　　④ に代入して　$-\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}+b$

これを解いて　$b=-\frac{9}{8}$

別解　$y=x^2-3x$の頂点の座標が$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$である。つまり，$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$の頂点が$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$である。$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$は$x^2$の係数が$\frac{1}{2}$なので，$x^2$の係数が$\frac{1}{2}$で頂点の座標が$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$である２次関数は　$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$　となるので，この式を展開した結果が$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$と一致すればいい。

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$$

以上より，$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$と比較して　$a=-\frac{3}{2}$，$b=-\frac{9}{8}$

２．放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=2x^2-3x+1$ になる。係数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=9$，$c=12$

解説

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+1$$
$$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

したがって，放物線 $y=2x^2-3x+1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して戻すと，求める放物線の頂点の座標は　$\left(\frac{3}{4}-3,\ -\frac{1}{8}+2\right)$　すなわち　$\left(-\frac{9}{4},\ \frac{15}{8}\right)$

この放物線の式は　$y=2\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$　すなわち　$y=2x^2+9x+12$

これが $y=ax^2+bx+c$ と一致するから　$a=2$，$b=9$，$c=12$

別解　放物線 $y=2x^2-3x+1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して戻すと，求める放物線の式は

$y-2=2\{x-(-3)\}^2-3\{x-(-3)\}+1$

すなわち　$y=2x^2+9x+12$

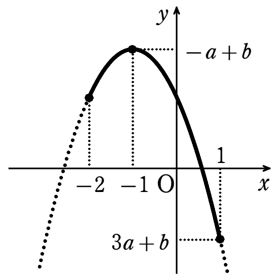
これが $y=ax^2+bx+c$ と一致するから　$a=2$，$b=9$，$c=12$

３．関数 $y=ax^2+2ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 5，最小値が -3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a<0$ とする。

解答　$a=-2$，$b=3$

解説

$y=ax^2+2ax+b$
$=a(x^2+2x)+b$
$=a\{(x+1)^2-1\}+b$
$=a(x+1)^2-a+b$　$(-2\leqq x\leqq 1)$



軸は$x=-1$で

$a<0$ であるから，関数のグラフは上に凸で，

この関数はグラフより，

$x=-1$ で最大値 $-a+b$，

軸より遠いのは$x=-2$でなく$x=1$なので，

$x=1$ で最小値 をとる。

$x=1$を代入して，$y=a\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=3a+b$

つまり，最大値$3a+b$

条件から　$-a+b=5$，$3a+b=-3$

これを解いて　$a=-2$，$b=3$

これは $a<0$ を満たす。

４．$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$3x+y=8$ のとき，xy の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=\frac{4}{3}$，$y=4$ のとき最大値 $\frac{16}{3}$，

$x=0$，$y=8$ または $x=\frac{8}{3}$，$y=0$ のとき 最小値 0

解説

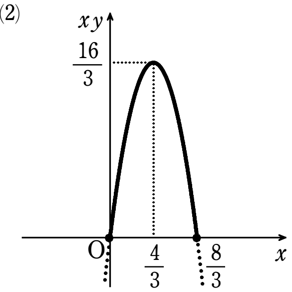
$3x+y=8$ から　$y=8-3x$　……①

$y\geqq 0$ から　$8-3x\geqq 0$　　よって　$x\leqq\frac{8}{3}$

$x\geqq 0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq\frac{8}{3}$　……②

また　$xy=x(8-3x)=-3x^2+8x$
$=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$

(2)



② の範囲の x について，xy は $x=\frac{4}{3}$ のとき最大，

$x=0$ または $x=\frac{8}{3}$ のとき最小となる。

① から　$x=\frac{4}{3}$ のとき $y=4$，　$x=0$ のとき $y=8$，　$x=\frac{8}{3}$ のとき $y=0$

したがって　$x=\frac{4}{3}$，$y=4$ のとき最大値 $\frac{16}{3}$，

$x=0$，$y=8$ または $x=\frac{8}{3}$，$y=0$ のとき 最小値 0

５．a は正の定数，関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最小値を m とする。

(1)　m を a を用いて表せ。

(2)　$m=5$ のとき，a の値を求めよ。

解答　(1)　$0<a\leqq 1$ のとき　$m=a^2$，$1<a$ のとき　$m=2a^2-2a+1$

(2)　$a=2$

解説

$y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$

よって，関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ のグラフの軸は，直線　$x=a$

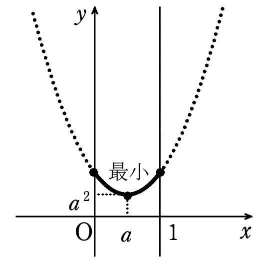
(1)　[1]　$0<a\leqq 1$ のとき

グラフは，右の図の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ のとき最小となる。

$x=a$ のとき　$y=a^2$

したがって　$m=a^2$



[2]　$1<a$ のとき

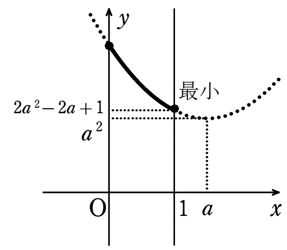
グラフは，右の図の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ のとき最小となる。

$x=1$ のとき

$y=1^2-2a\cdot 1+2a^2=2a^2-2a+1$

したがって　$m=2a^2-2a+1$



(2)　[1]　$0<a\leqq 1$ のとき，$a^2=5$ とおくと　$a=\pm\sqrt{5}$

$a=\pm\sqrt{5}$ は，$0<a\leqq 1$ を満たさないから，不適。

[2]　$1<a$ のとき，$2a^2-2a+1=5$ とおくと

$a^2-a-2=0$

ゆえに　$(a+1)(a-2)=0$　　よって　$a=-1$，2

$1<a$ であるから　$a=2$

以上から　$a=2$

6．関数 $y=x^2-4x+1$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値，最小値を，次の (1)〜(5) の場合について求めよ。

(1) $a \leqq 1$ (2) $1<a<\dfrac{3}{2}$ (3) $a=\dfrac{3}{2}$ (4) $\dfrac{3}{2}<a<2$ (5) $2 \leqq a$

解答 (1) $x=a$ のとき最大値 a^2-4a+1，$x=a+1$ のとき最小値 a^2-2a-2

(2) $x=a$ のとき最大値 a^2-4a+1，$x=2$ のとき最小値 -3

(3) $x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{11}{4}$，$x=2$ のとき最小値 -3

(4) $x=a+1$ のとき最大値 a^2-2a-2，$x=2$ のとき最小値 -3

(5) $x=a+1$ のとき最大値 a^2-2a-2，$x=a$ のとき最小値 a^2-4a+1

解説

関数の式を変形すると $y=(x-2)^2-3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$

また $x=a$ のとき $y=a^2-4a+1$，$x=a+1$ のとき $y=a^2-2a-2$，

$x=2$ のとき $y=-3$

さらに，定義域が$a \leqq x \leqq a+1$なので，定義域の中央は$x=a+\dfrac{1}{2}$

(1) $a \leqq 1$ のとき 両辺に 1 を足して $a+2 \leqq 2$

つまり，$x=a+2$は$x=2$よりも左側にある。

グラフより，定義域内で関数は常に減少するから

$x=a$ のとき最大値 a^2-4a+1，$x=a+1$ のとき最小値 a^2-2a-2

(2) $1<a<\dfrac{3}{2}$ のとき 左辺･中央･右辺のすべてに$\dfrac{1}{2}$を足して $\dfrac{3}{2}<a+\dfrac{1}{2}<2$

よって，中央$x=a+\dfrac{1}{2}$は軸$x=2$よりも左側，

$1<a<\dfrac{3}{2}$ の左辺･中央･右辺のすべてに1を足して $2<a+1<\dfrac{5}{2}$

よって，$x=a+1$は軸$x=2$よりも右側にある。

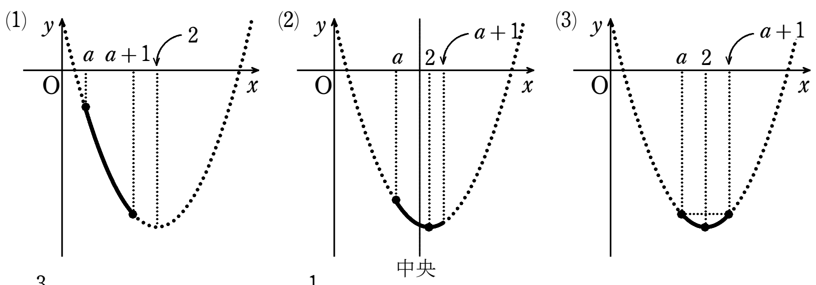
つまり，軸 $x=2$ は定義域中にあり，定義域の右半分の側にあるから

$x=a$ のとき最大値 a^2-4a+1，$x=2$ のとき最小値 -3

(3) $a=\dfrac{3}{2}$ のとき $a+\dfrac{1}{2}=2$

よって，軸 $x=2$ は定義域の中央にあるから

$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{11}{4}$，$x=2$ のとき最小値 -3



(4) $\dfrac{3}{2}<a<2$ のとき $2<a+\dfrac{1}{2}$

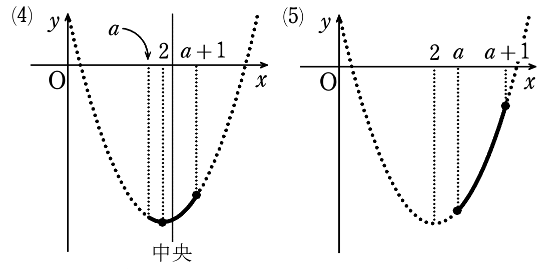
よって，(2)と同様に考えると軸 $x=2$ は定義域の左半分の側にあるから

$x=a+1$ のとき最大値 a^2-2a-2，$x=2$ のとき最小値 -3

(5) $2 \leqq a$ のとき(1)と同様に考える。$x=a$は$x=2$よりも右側にあるので

よって，関数は常に増加するから

$x=a+1$ のとき最大値 a^2-2a-2，$x=a$ のとき最小値 a^2-4a+1



7．グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 直線 $x=1$ を軸とし，2 点 $(3,\ -1)$，$(0,\ 2)$ を通る。

(2) 3 点 $(1,\ 12)$，$(-1,\ 4)$，$(-2,\ 9)$ を通る。

解答 (1) $y=-x^2+2x+2$ (2) $y=3x^2+4x+5$

解説

(1) 軸が直線 $x=1$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2+q$ とおける。

このグラフが 2 点 $(3,\ -1)$，$(0,\ 2)$ を通るから

$4a+q=-1$，$a+q=2$ これを解いて $a=-1$，$q=3$

よって，求める 2 次関数は

$y=-(x-1)^2+3$ すなわち $y=-x^2+2x+2$

(2) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

このグラフが 3 点 $(1,\ 12)$，$(-1,\ 4)$，$(-2,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=12 & \cdots\cdots ① \\ a-b+c=4 & \cdots\cdots ② \\ 4a-2b+c=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−② から $2b=8$ ゆえに $b=4$

③−② から $3a-b=5$ ……④

$b=4$ を ④ に代入して $3a-4=5$ ゆえに $a=3$

$a=3$，$b=4$ を ① に代入して $3+4+c=12$ ゆえに $c=5$

よって，求める 2 次関数は $y=3x^2+4x+5$

8．次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2) 2 次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3) 2 次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数の解をもつ。

解答 (1) $m<\dfrac{25}{4}$ (2) $m>\dfrac{17}{8}$ (3) $m \leqq 2$

解説

(1) この方程式が異なる 2 つの解をもつための条件は，係数について $D>0$ つまり

$5^2-4\cdot1\cdot m>0$ すなわち $25-4m>0$

これを解いて $m<\dfrac{25}{4}$

(2) この方程式が解をもたないための条件は，係数について $D<0$ つまり

$(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)<0$ すなわち $-8m+17<0$

これを解いて $m>\dfrac{17}{8}$

(3) この方程式が解をもつための条件は，係数について $D \geqq 0$ つまり

$6^2-4\cdot3\cdot(2m-1) \geqq 0$ すなわち $-24m+48 \geqq 0$

これを解いて $m \leqq 2$