数学演習（２次方程式）Ｈ２１．９．１　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

１．(1)　方程式 $x^2+ax-a^2=0$ の解の 1 つが -2 であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2)　2 つの 2 次方程式 $px^2+qx+2=0$，$x^2-px+q=0$ が，ともに $x=1$ を解にもつとき，定数 p，q の値を定めよ。

２．2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数の解をもつように，定数 k の値を定め，その共通解を求めよ。

３．(1)　2 次方程式 $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$ が実数の解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(2)　方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ がただ 1 つの実数の解をもつとき，定数 m の値を求めよ。

４．2 つの 2 次方程式 $x^2+2ax+a+6=0$，$x^2+6x+2a-1=0$ において，少なくとも一方が実数の解をもたないように，定数 a の値の範囲を定めよ。

５．a，p は定数とする。x についての方程式 $(p^2-1)x^2+2px+1=0$ を解け。

６．方程式 $(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2=-4$ を満たす x の値を求めよ。

7. 方程式 $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$ について考える。

$x=0$ はこの方程式の解ではないので x^2 で両辺を割り $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，t に関する 2 次方程式 ${}^{ア}\boxed{}$ を得る。これを解くと，$t={}^{イ}\boxed{}$ となるので，最初の方程式の解は $x={}^{ウ}\boxed{}$ となる。

8. 2 次方程式 $2x^2-3ax+a+1=0$ の 1 つの実数の解が 0 と 1 の間にあり，他の実数の解が 4 と 6 の間にある。このとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

9. x についての 2 次方程式 $3x^2-2(a+1)x+a^2=0$ が 0 より大きく 1 より小さい異なる 2 つの実数の解をもつための定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

10. a，b を整数の定数とする。x の 2 次方程式 $(a+4)x^2-2ax+a+b=0$ が重解をもつ a，b の組は全部で何組あるか求めよ。

数学演習（２次方程式）Ｈ２１．９．１　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．(1)　方程式 $x^2+ax-a^2=0$ の解の 1 つが -2 であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2)　2 つの 2 次方程式 $px^2+qx+2=0$，$x^2-px+q=0$ が，ともに $x=1$ を解にもつとき，定数 p，q の値を定めよ。

解答　(1)　$a=-1\pm\sqrt{5}$　　(2)　$p=-\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{3}{2}$

(1)　$x=-2$ が与えられた方程式の解であるから

$$(-2)^2+a(-2)-a^2=0$$

すなわち　$a^2+2a-4=0$

これを解いて　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2+4}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$

(2)　2 次方程式であるから　$p\neq 0$

$x=1$ が与えられた方程式 $px^2+qx+2=0$ の解であるから

$$p\cdot 1^2+q\cdot 1+2=0$$

すなわち　$p+q+2=0$ ……①

$x=1$ が与えられた方程式 $x^2-px+q=0$ の解でもあるから

$$1^2-p\cdot 1+q=0$$

すなわち　$-p+q+1=0$ ……②

①－② から　$2p+1=0$

ゆえに　$p=-\dfrac{1}{2}$　　これは $p\neq 0$ を満たす。

①＋② から　$2q+3=0$

ゆえに　$q=-\dfrac{3}{2}$

２．2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数の解をもつように，定数 k の値を定め，その共通解を求めよ。

解答　$k=-6$ のとき共通解 $x=2$

共通解を $x=\alpha$ とすると

$2\alpha^2+k\alpha+4=0$ ……①，　$\alpha^2+\alpha+k=0$ ……②

①－②×2 から　$(k-2)\alpha+4-2k=0$

すなわち　$(k-2)\alpha-2(k-2)=0$

よって　$(k-2)(\alpha-2)=0$

ゆえに　$k=2$　または　$\alpha=2$

$k=2$ のとき

2 つの方程式は，ともに $x^2+x+2=0$ となる。

その係数について　$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$

よって，実数の解をもたない。ゆえに，不適。

$\alpha=2$ のとき

② から　$k=-6$

このとき 2 つの方程式は

$2x^2-6x+4=0$，　$x^2+x-6=0$

となり，解はそれぞれ　$x=1,\ 2$；　$x=-3,\ 2$

よって，確かに共通解 $x=2$ をもつ。

以上により，$k=-6$ のとき　共通解 $x=2$

３．(1)　2 次方程式 $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$ が実数の解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(2)　方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ がただ 1 つの実数の解をもつとき，定数 m の値を求めよ。

解答　(1)　$-7\leqq m<2$，$2<m$　　(2)　$m=-1,\ -2,\ 3$

(1)　2 次方程式であるから　$m-2\neq 0$　ゆえに　$m\neq 2$

2 次方程式が実数の解をもつための条件は $D\geqq 0$ であるから

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m-2)(m+3)=m+7\geqq 0$$

ゆえに　$m\geqq -7$

よって　$-7\leqq m<2$，$2<m$

(2)　$m+1=0$ すなわち $m=-1$ のとき　$-4x-7=0$

ゆえに，ただ 1 つの実数の解 $x=-\dfrac{7}{4}$ をもつ。

$m\neq -1$ のとき

2 次方程式が重解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+1)(2m-5)=0$$

整理して　$m^2-m-6=0$

ゆえに　$(m+2)(m-3)=0$

よって　$m=-2,\ 3$

これらは $m\neq -1$ を満たす。

以上から，ただ 1 つの実数の解をもつとき

$$m=-1,\ -2,\ 3$$

４．2 つの 2 次方程式 $x^2+2ax+a+6=0$，$x^2+6x+2a-1=0$ において，少なくとも一方が実数の解をもたないように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-2<a<3$，$5<a$

$x^2+2ax+a+6=0$　……①

$x^2+6x+2a-1=0$　……②

とし，それぞれの 2 次方程式について

$D_1/4=a^2-(a+6)=a^2-a-6=(a+2)(a-3)$

$D_2/4=3^2-(2a-1)=-2a+10=-2(a-5)$

とする。

①，② の少なくとも一方が実数の解をもたない条件は

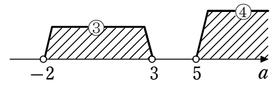
$D_1<0$　または　$D_2<0$

$D_1<0$　すなわち　$(a+2)(a-3)<0$ から

$-2<a<3$　……③

$D_2<0$　すなわち　$-2(a-5)<0$ から

$a>5$　……④



求める a の値の範囲は，③，④ を合わせた範囲であるから

$-2<a<3$，$5<a$

別解　①，② がともに実数の解をもつ条件は

$D_1\geqq 0$　かつ　$D_2\geqq 0$

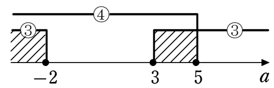
$D_1\geqq 0$　すなわち　$(a+2)(a-3)\geqq 0$ から

$a\leqq -2$，$3\leqq a$　……③

$D_2\geqq 0$　すなわち　$-2(a-5)\geqq 0$ から　$a\leqq 5$　……④

③，④ の共通範囲は

$a\leqq -2$，$3\leqq a\leqq 5$　……⑤



よって，⑤ の範囲以外，すなわち

$-2<a<3$，$5<a$

ならば，①，② の少なくとも一方が実数の解をもたない。

５．a，p は定数とする。x についての方程式 $(p^2-1)x^2+2px+1=0$ を解け。

解答　$p=1$ のとき　$x=-\dfrac{1}{2}$；$p=-1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$；

$p\neq\pm 1$ のとき　$x=-\dfrac{1}{p+1}$，$-\dfrac{1}{p-1}$

方程式を変形して

$(p+1)(p-1)x^2+2px+1=0$　……①

[1]　$p=1$ のとき

① から　$2x+1=0$　　ゆえに　$x=-\dfrac{1}{2}$

[2]　$p=-1$ のとき

① から　$-2x+1=0$　　ゆえに　$x=\dfrac{1}{2}$

[3]　$p\neq\pm 1$ のとき

① の左辺を因数分解して

$\{(p+1)x+1\}\{(p-1)x+1\}=0$

$p+1$	1	$\longrightarrow$	$p-1$
$p-1$	1	$\longrightarrow$	$p+1$
$(p+1)(p-1)$	1		$2p$

$p+1\neq 0$，$p-1\neq 0$ であるから

$x=-\dfrac{1}{p+1}$，$-\dfrac{1}{p-1}$

ゆえに　$p=1$ のとき　$x=-\dfrac{1}{2}$

$p=-1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$

$p\neq\pm 1$ のとき　$x=-\dfrac{1}{p+1}$，$-\dfrac{1}{p-1}$

6．方程式 $(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2=-4$ を満たす x の値を求めよ。

解答　$x=0,\ -2,\ -1\pm\sqrt{5}$

$x^2+2x=t$ とおくと

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2\\&=\{(x^2+2x)+3\}\{(x^2+2x)-2\}-5(x^2+2x)+2\\&=(t+3)(t-2)-5t+2=t^2-4t-4\end{aligned}$$

すなわち，与えられた方程式は

$$t^2-4t-4=-4$$

より

$$t(t-4)=0$$

解いて，$t=0,4$ が成り立つ。

（ⅰ）$t=0$ のとき，$t=x^2+2x=0$ より

$$x(x+2)=0$$

解いて，$x=0,\ -2$

（ⅱ）$t=4$ のとき，$t=x^2+2x=4$ より

$$x^2+2x-4=0$$

解いて，$x=-1\pm\sqrt{5}$

以上より，$x=0,\ -2,\ -1\pm\sqrt{5}$

7．方程式 $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$ について考える。

$x=0$ はこの方程式の解ではないので x^2 で両辺を割り $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，t に関する 2 次方程式 ア$\boxed{}$ を得る。これを解くと，$t=$ イ$\boxed{}$ となるので，最初の方程式の解は $x=$ ウ$\boxed{}$ となる。

解答　（ア）$t^2-6t+8=0$　（イ）2，4　（ウ）1，$2\pm\sqrt{3}$

$x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$ において $x\neq0$ であるから　$x^2>0$

与式の両辺を x^2 で割ると　$x^2-6x+10-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$　……①

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$

よって，① から　$t^2-2-6t+10=0$

すなわち　ア $t^2-6t+8=0$　ゆえに　$(t-2)(t-4)=0$

したがって　$t=$ イ 2，4

[1]　$t=2$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=2$　　よって　$x^2-2x+1=0$

すなわち　$(x-1)^2=0$　　ゆえに　$x=1$

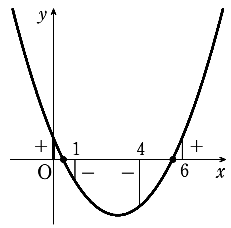
[2]　$t=4$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=4$　　よって　$x^2-4x+1=0$

これを解いて　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}=2\pm\sqrt{3}$

[1]，[2] により，求める解は　$x=$ ウ 1，$2\pm\sqrt{3}$

8．2 次方程式 $2x^2-3ax+a+1=0$ の 1 つの実数の解が 0 と 1 の間にあり，他の実数の解が 4 と 6 の間にある。このとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$3<a<\dfrac{73}{17}$



$f(x)=2x^2-3ax+a+1$ とおくと，求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と $0<x<1$，$4<x<6$ の範囲で 1 つずつ共有点をもつ条件である。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は図より

$f(0)>0$　かつ　$f(1)<0$　かつ

$f(4)<0$　かつ　$f(6)>0$

である。

$f(0)>0$ から　$a+1>0$　　ゆえに　$a>-1$　……①

$f(1)<0$ から　$2\cdot1^2-3a\cdot1+a+1<0$

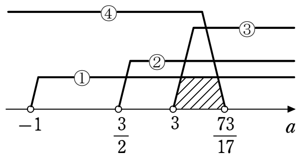
ゆえに　$a>\dfrac{3}{2}$　……②

$f(4)<0$ から　$2\cdot4^2-3a\cdot4+a+1<0$

ゆえに　$a>3$　……③

$f(6)>0$ から　$2\cdot6^2-3a\cdot6+a+1>0$

ゆえに　$a<\dfrac{73}{17}$　……④



求める a の値の範囲は，① ～ ④ の共通範囲で

$$3<a<\frac{73}{17}$$

9．x についての 2 次方程式 $3x^2-2(a+1)x+a^2=0$ が 0 より大きく 1 より小さい異なる 2 つの実数の解をもつための定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<a<0,\ 0<a<1,\ 1<a<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$f(x)=3x^2-2(a+1)x+a^2$ とおく。

2 次方程式 $f(x)=0$ がともに 0 より大きく 1 より小さい異なる解をもつ条件は，$0<x<1$ の範囲で，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わることである。

[1]　$D>0$　すなわち　$D/4>0$ から　$(a+1)^2-3a^2>0$

整理すると　$2a^2-2a-1<0$

これを解いて　$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　……①

[2]　放物線 $y=f(x)$ の軸は，直線 $x=\dfrac{a+1}{3}$ であるから　$0<\dfrac{a+1}{3}<1$

これを解いて　$-1<a<2$　……②

[3]　$f(0)>0$ から　$a^2>0$

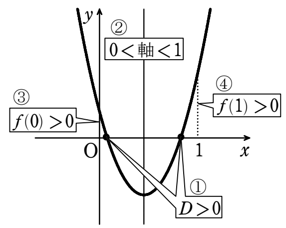
ゆえに　$a\neq0$　……③

[4]　$f(1)>0$ から　$(a-1)^2>0$

ゆえに　$a\neq1$　……④

求める a の値の範囲は，① ～ ④ の共通範囲で

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<0,\ 0<a<1,\ 1<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$



10．a，b を整数の定数とする。x の 2 次方程式 $(a+4)x^2-2ax+a+b=0$ が重解をもつ a，b の組は全部で何組あるか求めよ。

解答　10

2 次方程式であるから　$a+4\neq0$　　ゆえに　$a\neq-4$

2 次方程式が重解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=a^2-(a+4)(a+b)=0$$

整理して　$ab+4a+4b=0$

a でくくって　$a(b+4)+4b=0$

$a(b+4)+4(b+4-4)=0$

よって　$a(b+4)+4(b+4)=16$

ゆえに　$(a+4)(b+4)=16$

これを満たす整数 a，b の組は，$a+4$ も $b+4$ も整数なので，これらは 16 の約数より

$(a+4,\ b+4)=(-16,\ -1),\ (-8,\ -2),\ (-4,\ -4),\ (-2,\ -8),$
$(-1,\ -16),\ (1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$

ゆえに

$(a,\ b)=(-20,\ -5),\ (-12,\ -6),\ (-8,\ -8),\ (-6,\ -12),$
$(-5,\ -20),\ (-3,\ 12),\ (-2,\ 4),\ (0,\ 0),\ (4,\ -2),\ (12,\ -3)$

これらは，すべて $a\neq-4$ を満たす。

よって，全部で 10 組ある。