数学演習（２次方程式）Ｈ２２．６．１６　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の２次方程式を解け。

(1) $x^2+10x+24=0$　　(2) $3x^2+10x+3=0$

(3) $4x^2+8x-21=0$　　(4) $16x^2-3=0$

$\boxed{2}$ 解の公式を利用して，次の２次方程式を解け。

(1) $2x^2-5x+1=0$　　(2) $9x(2x+1)=2$

(3) $2\sqrt{6}\,x^2+12x+3\sqrt{6}=0$　　(4) $(x+2)^2+4(x+2)-1=0$

$\boxed{3}$ (1) 2次方程式 $x^2+ax-a^2=0$ の解の1つが -2 であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 2つの2次方程式 $px^2+qx+2=0$，$x^2-px+q=0$ が，ともに $x=1$ を解にもつとき，定数 p，q の値を求めよ。

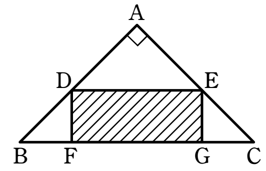
$\boxed{4}$ (1)　2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+k^2-3k-1=0$ が実数解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2)　2 次方程式 $3x^2+8x+k=0$ が重解をもつように，定数 k の値を定め，そのときの重解を求めよ。

$\boxed{5}$ (1)　x の 2 次方程式 $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$ が実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(2)　x の方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 m の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 右の図のように，BC＝20 cm，AB＝AC，∠A＝90° の三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD＝AE となるように 2 点 D，E をとり，D，E から辺 BC に垂線を引き，その交点をそれぞれ F，G とする。長方形 DFGE の面積が 20 cm^2 となるとき，辺 FG の長さを求めよ。



$\boxed{1}$ 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+10x+24=0$　　(2) $3x^2+10x+3=0$

(3) $4x^2+8x-21=0$　　(4) $16x^2-3=0$

解答 (1) $x=-4,\ -6$　(2) $x=-3,\ -\dfrac{1}{3}$　(3) $x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{2}$

(4) $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解説

(1) 左辺を因数分解して　$(x+4)(x+6)=0$

よって　$x=-4,\ -6$

(2) 左辺を因数分解して　$(x+3)(3x+1)=0$

よって　$x=-3,\ -\dfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \to 9 \\ 3 & 1 & \to 1 \\ \hline 3 & 3 & 10 \end{array}$$

(3) 左辺を因数分解して　$(2x-3)(2x+7)=0$

よって　$x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{2}$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -3 & \to -6 \\ 2 & 7 & \to 14 \\ \hline 4 & -21 & 8 \end{array}$$

(4) $x^2=\dfrac{3}{16}$ であるから

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{16}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

別解 左辺を因数分解して　$(4x+\sqrt{3})(4x-\sqrt{3})=0$

よって　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{2}$ 解の公式を利用して，次の 2 次方程式を解け。

(1) $2x^2-5x+1=0$　　(2) $9x(2x+1)=2$

(3) $2\sqrt{6}\,x^2+12x+3\sqrt{6}=0$　　(4) $(x+2)^2+4(x+2)-1=0$

解答 (1) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$　(2) $x=\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{2}{3}$　(3) $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $x=-4\pm\sqrt{5}$

解説

(1) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(2) 整理すると，$18x^2+9x-2=0$ であるから

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 18\cdot(-2)}}{2\cdot 18}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{36}=\frac{-9\pm 15}{36}$$

よって　$x=\dfrac{6}{36},\ -\dfrac{24}{36}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{2}{3}$

(3) 両辺を $\sqrt{6}$ で割ると　$2x^2+2\sqrt{6}\,x+3=0$

よって　$x=\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{(\sqrt{6})^2-2\cdot 3}}{2}=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 0}{2}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $x+2=A$ とおくと，$A^2+2\cdot 2A-1=0$ であるから

$$A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-1)}}{1}=-2\pm\sqrt{5}$$

よって　$x=A-2=-4\pm\sqrt{5}$

$\boxed{3}$ (1) 2 次方程式 $x^2+ax-a^2=0$ の解の 1 つが -2 であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 2 つの 2 次方程式 $px^2+qx+2=0$，$x^2-px+q=0$ が，ともに $x=1$ を解にもつとき，定数 p，q の値を求めよ。

解答 (1) $a=-1\pm\sqrt{5}$　(2) $p=-\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $x=-2$ が与えられた方程式の解であるから

$$(-2)^2+a(-2)-a^2=0$$

すなわち　$a^2+2a-4=0$

これを解いて　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2+4}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$

(2) 2 次方程式であるから　$p\fallingdotseq 0$

$x=1$ が与えられた方程式 $px^2+qx+2=0$ の解であるから

$$p\cdot 1^2+q\cdot 1+2=0$$

すなわち　$p+q+2=0$　…… ①

$x=1$ が与えられた方程式 $x^2-px+q=0$ の解でもあるから

$$1^2-p\cdot 1+q=0$$

すなわち　$-p+q+1=0$　…… ②

①－② から　$2p+1=0$

よって　$p=-\dfrac{1}{2}$　これは $p\fallingdotseq 0$ を満たす。

①＋② から　$2q+3=0$

よって　$q=-\dfrac{3}{2}$

$\boxed{4}$ (1)　2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+k^2-3k-1=0$ が実数解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2)　2 次方程式 $3x^2+8x+k=0$ が重解をもつように，定数 k の値を定め，そのときの重解を求めよ。

解答　(1)　$k \geqq -\dfrac{5}{8}$　　(2)　$k=\dfrac{16}{3}$，重解 $x=-\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2-3k-1)=8k+5$$

2 次方程式が実数解をもつための条件は $D \geqq 0$ であるから

$$8k+5 \geqq 0$$

ゆえに　$k \geqq -\dfrac{5}{8}$

(2)　2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4^2-3\cdot k=16-3k$$

2 次方程式が重解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$16-3k=0$$

ゆえに　$k=\dfrac{16}{3}$

また，重解は　$x=-\dfrac{8}{2\cdot3}=-\dfrac{4}{3}$

$\boxed{5}$ (1)　x の 2 次方程式 $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$ が実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(2)　x の方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 m の値を求めよ。

解答　(1)　$-7 \leqq m<2$，$2<m$　　(2)　$m=-2$，-1，3

解説

(1)　2 次方程式であるから　$m-2 \neq 0$　　よって　$m \neq 2$

2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(m-2)(m+3)=m+7$$

2 次方程式が実数解をもつための条件は $D \geqq 0$ であるから

$$m+7 \geqq 0$$

ゆえに　$m \geqq -7$　　よって　$-7 \leqq m<2$，$2<m$

(2)　$m+1=0$ すなわち $m=-1$ のとき　$-4x-7=0$

よって，ただ 1 つの実数解 $x=-\dfrac{7}{4}$ をもつ。

$m \neq -1$ のとき

方程式は 2 次方程式で，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+1)(2m-5)=-m^2+m+6$$

2 次方程式がただ 1 つの実数解をもつための条件は $D=0$ であるから

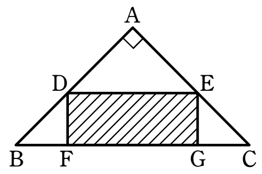
$$-m^2+m+6=0$$

ゆえに　$(m+2)(m-3)=0$　　これを解いて　$m=-2$，3

これらは $m \neq -1$ を満たす。

以上から，ただ 1 つの実数解をもつとき　$m=-2$，-1，3

$\boxed{6}$ 右の図のように，BC $=20$ cm，AB $=$ AC，$\angle$A $=90^\circ$ の三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD $=$ AE となるように 2 点 D，E をとり，D，E から辺 BC に垂線を引き，その交点をそれぞれ F，G とする。長方形 DFGE の面積が 20 cm^2 となるとき，辺 FG の長さを求めよ。

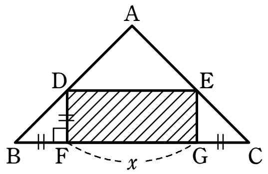


解答　$10 \pm 2\sqrt{15}$ cm

解説

FG $=x$ とおくと，$0<$ FG $<$ BC であるから

$$0<x<20 \quad \cdots\cdots ①$$



また，DF $=$ BF $=$ CG であるから

$$2\text{DF}=\text{BC}-\text{FG}$$

よって　$\text{DF}=\dfrac{20-x}{2}$

長方形 DFGE の面積は　$\text{DF}\cdot\text{FG}=\dfrac{20-x}{2}\cdot x$

ゆえに　$\dfrac{20-x}{2}\cdot x=20$　　整理すると　$x^2-20x+40=0$

これを解いて　$x=-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-1\cdot40}=10\pm2\sqrt{15}$

$0<2\sqrt{15}<8$ から　$10-8<10-2\sqrt{15}$，$10+2\sqrt{15}<10+8$

よって，この解はいずれも ① を満たす。

したがって　$\text{FG}=10\pm2\sqrt{15}$ (cm)