

1 次の2次方程式を解け。

(1) $x(x-5)=0$

(2) $x^2+2x-8=0$

(3) $x^2+6x+9=0$

(4) $x^2-9x+14=0$

(5) $2x^2+x=0$

(6) $2x^2+5x+2=0$

(7) $3x^2-7x-6=0$

(8) $6x^2+x-12=0$

(9) $4x^2-4x+1=0$

2 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2+x-3=0$

(2) $2x^2-5x+1=0$

(3) $x^2-4x-1=0$

(4) $4x^2+12x+7=0$

(5) $3x^2-9x+5=0$

(6) $8x^2+2x-1=0$

(7) $x^2-\sqrt{6}x-1=0$

(8) $x^2+2\sqrt{7}x+5=0$

3 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-4x-2=0$

(2) $2x^2-10x+1=0$

(3) $4x^2+11x-3=0$

(4) $-2x^2+4x+3=0$

(5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$

(6) $20x-25-4x^2=0$

(7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$

(8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$

(9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$

(10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

- 4
- (1) 2次方程式 $x^2+ax-10=0$ の解の1つが2である。このとき、定数 a の値と他の解を求めよ。
- (2) 2次方程式 $x^2+(a-b)x+b=0$ の解が -1 と 2 のとき、定数 a , b の値を求めよ。

- 6
- 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。
- (1) $x^2+2x+5=0$
- (2) $-2x^2-5x+1=0$
- (3) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

- 8
- x の2次方程式 $x^2+2x+m=0$ の実数解の個数を求めよ。

- 5
- 次の2次方程式が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。
- (1) $x^2-6x+2m+1=0$
- (2) $x^2+mx+m+3=0$

- 7
- 次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。
- (1) 2次方程式 $x^2+4x+m=0$ が異なる2つの実数解をもつ。
- (2) 2次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数解をもたない。
- (3) 2次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数解をもつ。

- 9
- 2つの2次方程式 $x^2+3x+m=0$, $x^2-x+3m=0$ が共通な解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、その共通な解を求めよ。

1 次の2次方程式を解け。

- (1) $x(x-5)=0$
- (2) $x^2+2x-8=0$
- (3) $x^2+6x+9=0$
- (4) $x^2-9x+14=0$
- (5) $2x^2+x=0$
- (6) $2x^2+5x+2=0$
- (7) $3x^2-7x-6=0$
- (8) $6x^2+x-12=0$
- (9) $4x^2-4x+1=0$

【解答】 (1) $x=0, 5$ (2) $x=2, -4$ (3) $x=-3$ (4) $x=2, 7$
(5) $x=0, -\frac{1}{2}$ (6) $x=-2, -\frac{1}{2}$ (7) $x=3, -\frac{2}{3}$ (8) $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$
(9) $x=\frac{1}{2}$

【解説】 (1) $x(x-5)=0$ から $x=0$ または $x-5=0$
したがって $x=0, 5$
(2) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x+4)=0$
よって $x-2=0$ または $x+4=0$
したがって $x=2, -4$
(3) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2=0$
よって $x+3=0$
したがって $x=-3$
(4) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x-7)=0$
よって $x-2=0$ または $x-7=0$
したがって $x=2, 7$
(5) 左辺を因数分解すると $x(2x+1)=0$
よって $x=0$ または $2x+1=0$
したがって $x=0, -\frac{1}{2}$
(6) 左辺を因数分解すると $(x+2)(2x+1)=0$
よって $x+2=0$ または $2x+1=0$
したがって $x=-2, -\frac{1}{2}$
(7) 左辺を因数分解すると $(x-3)(3x+2)=0$
よって $x-3=0$ または $3x+2=0$
したがって $x=3, -\frac{2}{3}$
(8) 左辺を因数分解すると $(2x+3)(3x-4)=0$
よって $2x+3=0$ または $3x-4=0$
したがって $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$
(9) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2=0$
よって $2x-1=0$
したがって $x=\frac{1}{2}$

2 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2+x-3=0$
- (2) $2x^2-5x+1=0$
- (3) $x^2-4x-1=0$
- (4) $4x^2+12x+7=0$
- (5) $3x^2-9x+5=0$
- (6) $8x^2+2x-1=0$
- (7) $x^2-\sqrt{6}x-1=0$
- (8) $x^2+2\sqrt{7}x+5=0$

【解答】 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ (3) $x=2\pm\sqrt{5}$
(4) $x=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$ (5) $x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$ (6) $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

- (7) $x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{10}}{2}$
- (8) $x=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$

【解説】

(1) 解の公式により
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

(2) 解の公式により
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

(3) 解の公式により
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}=2\pm\sqrt{5}$
(4) 解の公式により
$$x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot4\cdot7}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm\sqrt{32}}{8}$$

$$=\frac{-12\pm4\sqrt{2}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot7}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{-6\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$
(5) 解の公式により
$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$$

(6) 解の公式により
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot8\cdot(-1)}}{2\cdot8}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{16}=\frac{-2\pm6}{16}$$

$$\frac{-2+6}{16}=\frac{1}{4}, \frac{-2-6}{16}=-\frac{1}{2}$$
 であるから $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$
【別解】 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-8\cdot(-1)}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{-1\pm3}{8}$
$$\frac{-1+3}{8}=\frac{1}{4}, \frac{-1-3}{8}=-\frac{1}{2}$$
 であるから $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$
【別解】 左辺を因数分解して $(2x+1)(4x-1)=0$
よって $2x+1=0$ または $4x-1=0$
したがって $x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(7) 解の公式により
$$x=\frac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{10}}{2}$$

(8) 解の公式により
$$x=\frac{-2\sqrt{7}\pm\sqrt{(2\sqrt{7})^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{-2\sqrt{7}\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{7}\pm2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$$

【別解】 $x=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{(\sqrt{7})^2-1\cdot5}}{1}=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$

3 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2-4x-2=0$
- (2) $2x^2-10x+1=0$

- (3) $4x^2+11x-3=0$
- (4) $-2x^2+4x+3=0$
- (5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$
- (6) $20x-25-4x^2=0$
- (7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$
- (8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$
- (9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$
- (10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

【解答】 (1) $x=2\pm\sqrt{6}$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$ (3) $x=-3, \frac{1}{4}$ (4) $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$
(5) $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (6) $x=\frac{5}{2}$ (7) $x=-1, \frac{3}{2}$ (8) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
(9) $x=2, \frac{4}{3}$ (10) $x=2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$

【解説】

(1) 解の公式により
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-2)}}{1}=2\pm\sqrt{6}$
(2) 解の公式により
$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{10\pm\sqrt{92}}{4}$$

$$=\frac{10\pm2\sqrt{23}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-2\cdot1}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$
(3) 左辺を因数分解すると $(x+3)(4x-1)=0$
よって $x+3=0$ または $4x-1=0$
したがって $x=-3, \frac{1}{4}$
(4) 両辺に -1 を掛けて $2x^2-4x-3=0$
解の公式により
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

(5) 両辺に 6 を掛けて $6x^2-7x-3=0$
左辺を因数分解して $(2x-3)(3x+1)=0$
よって $2x-3=0$ または $3x+1=0$
したがって $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$
(6) 両辺に -1 を掛けて、整理すると $4x^2-20x+25=0$
左辺を因数分解して $(2x-5)^2=0$
すなわち $2x-5=0$
よって $x=\frac{5}{2}$
(7) 両辺を展開して $x^2+5x-6=7x-3x^2$
整理すると $4x^2-2x-6=0$

$$\begin{aligned} \text{両辺を } 2 \text{ で割って} \quad & 2x^2 - x - 3 = 0 \\ \text{左辺を因数分解して} \quad & (x+1)(2x-3) = 0 \\ \text{よって} \quad & x+1=0 \text{ または } 2x-3=0 \\ \text{したがって} \quad & x=-1, \frac{3}{2} \\ (8) \quad & x+2=X \text{ とおくと} \quad X^2-5X+5=0 \\ \text{解の公式により} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \text{よって} \quad x+2 &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \text{したがって} \quad x &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

別解 左辺を展開して整理すると $x^2 - x - 1 = 0$
 解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ (9) \quad \text{両辺に } 100 \text{ を掛けて} \quad & 15x(20-5x) = 50x + 200 \\ \text{両辺を } 5 \text{ で割って} \quad & 3x(20-5x) = 10x + 40 \\ \text{両辺を } 5 \text{ で割って} \quad & 3x(4-x) = 2x + 8 \\ \text{展開して整理すると} \quad & 3x^2 - 10x + 8 = 0 \\ \text{左辺を因数分解して} \quad & (x-2)(3x-4) = 0 \\ \text{よって} \quad x-2=0 \text{ または } 3x-4=0 \\ \text{したがって} \quad x &= 2, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

参考 最初に両辺に 4 を掛けてもよい。

(10) 解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} &= 3\sqrt{3}, \quad \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ であるから} \quad x = 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

- 4** (1) 2 次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ の解の 1 つが 2 である。このとき、定数 a の値と他の解を求めよ。
 (2) 2 次方程式 $x^2 + (a-b)x + b = 0$ の解が -1 と 2 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

解答 (1) $a=3$, 他の解は $x=-5$ (2) $a=-3, b=-2$

解説

- (1) この方程式が $x=2$ を解にもつから、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 2^2 + a \cdot 2 - 10 &= 0 \\ \text{すなわち} \quad 2a - 6 &= 0 \\ \text{これを解いて} \quad a &= 3 \\ a=3 \text{ を方程式に代入して} \quad & x^2 + 3x - 10 = 0 \\ \text{ゆえに} \quad (x-2)(x+5) &= 0 \\ \text{よって} \quad x &= 2, -5 \\ \text{したがって、他の解は} \quad x &= -5 \end{aligned}$$

- (2) この方程式が $x=-1$ と $x=2$ を解にもつから、次の 2 つの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (-1)^2 + (a-b) \cdot (-1) + b &= 0 \\ 2^2 + (a-b) \cdot 2 + b &= 0 \\ \text{すなわち} \quad a - 2b &= 1, \quad 2a - b = -4 \\ \text{この連立方程式を解いて} \quad a &= -3, \quad b = -2 \end{aligned}$$

- 5** 次の 2 次方程式が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

(1) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ (2) $x^2 + mx + m + 3 = 0$

解答 (1) $m=4$, 重解は $x=3$
 (2) $m=-2$ のとき重解 $x=1$, $m=6$ のとき重解 $x=-3$

解説

- (1) この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m + 1) = 32 - 8m$
 2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから $32 - 8m = 0$
 よって $m = 4$
 また、重解は $x = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$
 (2) この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) = m^2 - 4m - 12$
 2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから $m^2 - 4m - 12 = 0$
 すなわち $(m+2)(m-6) = 0$
 よって $m = -2, 6$
 また、重解は $x = -\frac{m}{2}$ であるから
 $m = -2$ のとき $x = 1$, $m = 6$ のとき $x = -3$

- 6** 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 + 2x + 5 = 0$ (2) $-2x^2 - 5x + 1 = 0$ (3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

解答 (1) 0 個 (2) 2 個 (3) 1 個

解説

- (1) $x^2 + 2x + 5 = 0$ の判別式を D とすると $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$
 よって、実数解の個数は 0 個
 (2) $-2x^2 - 5x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 33 > 0$
 よって、実数解の個数は 2 個
 (3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0$
 よって、実数解の個数は 1 個

- 7** 次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 + 4x + m = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。
 (2) 2 次方程式 $2x^2 - 3x + m - 1 = 0$ が実数解をもたない。
 (3) 2 次方程式 $3x^2 + 6x + 2m - 1 = 0$ が実数解をもつ。

解答 (1) $m < 4$ (2) $m > \frac{17}{8}$ (3) $m \leq 2$

解説

- (1) この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = -4m + 16$
 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D > 0$ のときであるから
 $-4m + 16 > 0$
 これを解いて $m < 4$
 (2) この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = -8m + 17$
 2 次方程式が実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから
 $-8m + 17 < 0$
 これを解いて $m > \frac{17}{8}$

- (3) この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2m - 1) = -24m + 48 \\ 2 \text{ 次方程式が実数解をもつのは } D &\geq 0 \text{ のときであるから} \\ -24m + 48 &\geq 0 \\ \text{これを解いて} \quad m &\leq 2 \end{aligned}$$

- 8** x の 2 次方程式 $x^2 + 2x + m = 0$ の実数解の個数を求めよ。

解答 $m < 1$ のとき 2 個, $m = 1$ のとき 1 個, $m > 1$ のとき 0 個

解説

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4 - 4m = 4(1 - m)$$

- [1] $D > 0$ すなわち $m < 1$ のとき

実数解の個数は 2 個

- [2] $D = 0$ すなわち $m = 1$ のとき

実数解の個数は 1 個

- [3] $D < 0$ すなわち $m > 1$ のとき

実数解の個数は 0 個

以上から、 $m < 1$ のとき 2 個

$m = 1$ のとき 1 個

$m > 1$ のとき 0 個

- 9** 2 つの 2 次方程式 $x^2 + 3x + m = 0$, $x^2 - x + 3m = 0$ が共通な解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、その共通な解を求めよ。

解答 $m = 0$ のとき 共通な解は 0, $m = -10$ のとき 共通な解は -5

解説

共通な解を α とすると $\alpha^2 + 3\alpha + m = 0$ …… ①

$\alpha^2 - \alpha + 3m = 0$ …… ②

① から $m = -\alpha^2 - 3\alpha$ …… ③

これを ② に代入して $\alpha^2 - \alpha + 3(-\alpha^2 - 3\alpha) = 0$

よって $2\alpha^2 + 10\alpha = 0$

すなわち $\alpha(\alpha + 5) = 0$

したがって $\alpha = 0, -5$

ゆえに、③ から、 $\alpha = 0$ のとき $m = 0$
 $\alpha = -5$ のとき $m = -10$