

1 次の2次方程式を解け。

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| (1) $x(x-5)=0$ | (2) $x^2+2x-8=0$ | (3) $x^2+6x+9=0$ |
| (4) $x^2-9x+14=0$ | (5) $2x^2+x=0$ | (6) $2x^2+5x+2=0$ |
| (7) $3x^2-7x-6=0$ | (8) $6x^2+x-12=0$ | (9) $4x^2-4x+1=0$ |

2 次の2次方程式を解け。

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-------------------|
| (1) $x^2+x-3=0$ | (2) $2x^2-5x+1=0$ | (3) $x^2-4x-1=0$ |
| (4) $4x^2+12x+7=0$ | (5) $3x^2-9x+5=0$ | (6) $8x^2+2x-1=0$ |
| (7) $x^2-\sqrt{6}x-1=0$ | (8) $x^2+2\sqrt{7}x+5=0$ | |

3 次の2次方程式を解け。

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| (1) $x^2-4x-2=0$ | (2) $2x^2-10x+1=0$ |
| (3) $4x^2+11x-3=0$ | (4) $-2x^2+4x+3=0$ |
| (5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$ | (6) $20x-25-4x^2=0$ |
| (7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$ | (8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$ |
| (9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$ | (10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$ |

4 (1) 2次方程式 $x^2+ax-10=0$ の解の1つが2である。このとき、定数 a の値と他の解を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2+(a-b)x+b=0$ の解が -1 と 2 のとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

5 次の2次方程式が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

(1) $x^2-6x+2m+1=0$

(2) $x^2+mx+m+3=0$

6 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2+2x+5=0$

(2) $-2x^2-5x+1=0$

(3) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

7 次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2次方程式 $x^2+4x+m=0$ が異なる2つの実数解をもつ。

(2) 2次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数解をもたない。

(3) 2次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数解をもつ。

8 x の2次方程式 $x^2+2x+m=0$ の実数解の個数を求めよ。

9 2つの2次方程式 $x^2+3x+m=0$ 、 $x^2-x+3m=0$ が共通な解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、その共通な解を求めよ。

1 次の2次方程式を解け。

- (1) $x(x-5)=0$ (2) $x^2+2x-8=0$ (3) $x^2+6x+9=0$
 (4) $x^2-9x+14=0$ (5) $2x^2+x=0$ (6) $2x^2+5x+2=0$
 (7) $3x^2-7x-6=0$ (8) $6x^2+x-12=0$ (9) $4x^2-4x+1=0$

【解答】 (1) $x=0, 5$ (2) $x=2, -4$ (3) $x=-3$ (4) $x=2, 7$
 (5) $x=0, -\frac{1}{2}$ (6) $x=-2, -\frac{1}{2}$ (7) $x=3, -\frac{2}{3}$ (8) $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$
 (9) $x=\frac{1}{2}$

【解説】
 (1) $x(x-5)=0$ から $x=0$ または $x-5=0$
 したがって $x=0, 5$
 (2) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x+4)=0$
 よって $x-2=0$ または $x+4=0$
 したがって $x=2, -4$
 (3) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2=0$
 よって $x+3=0$
 したがって $x=-3$
 (4) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x-7)=0$
 よって $x-2=0$ または $x-7=0$
 したがって $x=2, 7$
 (5) 左辺を因数分解すると $x(2x+1)=0$
 よって $x=0$ または $2x+1=0$
 したがって $x=0, -\frac{1}{2}$
 (6) 左辺を因数分解すると $(x+2)(2x+1)=0$
 よって $x+2=0$ または $2x+1=0$
 したがって $x=-2, -\frac{1}{2}$
 (7) 左辺を因数分解すると $(x-3)(3x+2)=0$
 よって $x-3=0$ または $3x+2=0$
 したがって $x=3, -\frac{2}{3}$
 (8) 左辺を因数分解すると $(2x+3)(3x-4)=0$
 よって $2x+3=0$ または $3x-4=0$
 したがって $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$
 (9) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2=0$
 よって $2x-1=0$
 したがって $x=\frac{1}{2}$

2 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2+x-3=0$ (2) $2x^2-5x+1=0$ (3) $x^2-4x-1=0$
 (4) $4x^2+12x+7=0$ (5) $3x^2-9x+5=0$ (6) $8x^2+2x-1=0$
 (7) $x^2-\sqrt{6}x-1=0$ (8) $x^2+2\sqrt{7}x+5=0$

【解答】 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ (3) $x=2\pm\sqrt{5}$
 (4) $x=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$ (5) $x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$ (6) $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

(7) $x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{10}}{2}$ (8) $x=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$

【解説】
 (1) 解の公式により

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot (-3)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

(2) 解の公式により

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

(3) 解の公式により

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot (-1)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot (-1)}}{1}=2\pm\sqrt{5}$

(4) 解の公式により

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 4\cdot 7}}{2\cdot 4}=\frac{-12\pm\sqrt{32}}{8}$$

$$=\frac{-12\pm 4\sqrt{2}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 7}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{-6\pm 2\sqrt{2}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$

(5) 解の公式により

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot 3}=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$$

(6) 解の公式により

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 8\cdot (-1)}}{2\cdot 8}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{16}=\frac{-2\pm 6}{16}$$

$$\frac{-2+6}{16}=\frac{1}{4}, \frac{-2-6}{16}=-\frac{1}{2}$$
 であるから $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

【別解】 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-8\cdot (-1)}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{-1\pm 3}{8}$

$$\frac{-1+3}{8}=\frac{1}{4}, \frac{-1-3}{8}=-\frac{1}{2}$$
 であるから $x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

【別解】 左辺を因数分解して $(2x+1)(4x-1)=0$
 よって $2x+1=0$ または $4x-1=0$
 したがって $x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(7) 解の公式により

$$x=\frac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-4\cdot 1\cdot (-1)}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{10}}{2}$$

(8) 解の公式により

$$x=\frac{-2\sqrt{7}\pm\sqrt{(2\sqrt{7})^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-2\sqrt{7}\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{7}\pm 2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$$

【別解】 $x=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{(\sqrt{7})^2-1\cdot 5}}{1}=-\sqrt{7}\pm\sqrt{2}$

3 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2-4x-2=0$ (2) $2x^2-10x+1=0$

- (3) $4x^2+11x-3=0$ (4) $-2x^2+4x+3=0$
 (5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$ (6) $20x-25-4x^2=0$
 (7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$ (8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$
 (9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$ (10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

【解答】 (1) $x=2\pm\sqrt{6}$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$ (3) $x=-3, \frac{1}{4}$ (4) $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$
 (5) $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (6) $x=\frac{5}{2}$ (7) $x=-1, \frac{3}{2}$ (8) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
 (9) $x=2, \frac{4}{3}$ (10) $x=2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$

【解説】
 (1) 解の公式により

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot (-2)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot (-2)}}{1}=2\pm\sqrt{6}$

(2) 解の公式により

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{10\pm\sqrt{92}}{4}$$

$$=\frac{10\pm 2\sqrt{23}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-2\cdot 1}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$

(3) 左辺を因数分解すると $(x+3)(4x-1)=0$
 よって $x+3=0$ または $4x-1=0$
 したがって $x=-3, \frac{1}{4}$

(4) 両辺に -1 を掛けて $2x^2-4x-3=0$
 解の公式により

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot (-3)}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

【別解】 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot (-3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

(5) 両辺に 6 を掛けて $6x^2-7x-3=0$
 左辺を因数分解して $(2x-3)(3x+1)=0$
 よって $2x-3=0$ または $3x+1=0$
 したがって $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$

(6) 両辺に -1 を掛けて、整理すると $4x^2-20x+25=0$
 左辺を因数分解して $(2x-5)^2=0$
 すなわち $2x-5=0$
 よって $x=\frac{5}{2}$

(7) 両辺を展開して $x^2+5x-6=7x-3x^2$
 整理すると $4x^2-2x-6=0$

両辺を2で割って $2x^2 - x - 3 = 0$
 左辺を因数分解して $(x+1)(2x-3) = 0$
 よって $x+1=0$ または $2x-3=0$

したがって $x = -1, \frac{3}{2}$

(8) $x+2=X$ とおくと $X^2 - 5X + 5 = 0$

解の公式により

$$X = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって $x+2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

したがって $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

別解 左辺を展開して整理すると $x^2 - x - 1 = 0$

解の公式により

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(9) 両辺に100を掛けて $15x(20-5x) = 50x + 200$

両辺を5で割って $3x(20-5x) = 10x + 40$

両辺を5で割って $3x(4-x) = 2x + 8$

展開して整理すると $3x^2 - 10x + 8 = 0$

左辺を因数分解して $(x-2)(3x-4) = 0$

よって $x-2=0$ または $3x-4=0$

したがって $x = 2, \frac{4}{3}$

参考 最初に両辺に4を掛けてもよい。

(10) 解の公式により

$$x = \frac{-(-5\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$$

$\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ であるから $x = 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$

4 (1) 2次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ の解の1つが2である。このとき、定数 a の値と他の解を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2 + (a-b)x + b = 0$ の解が -1 と 2 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

解答 (1) $a = 3$, 他の解は $x = -5$ (2) $a = -3, b = -2$

解説

(1) この方程式が $x = 2$ を解にもつから、次の等式が成り立つ。

$$2^2 + a \cdot 2 - 10 = 0$$

すなわち $2a - 6 = 0$

これを解いて $a = 3$

$a = 3$ を方程式に代入して $x^2 + 3x - 10 = 0$

ゆえに $(x-2)(x+5) = 0$

よって $x = 2, -5$

したがって、他の解は $x = -5$

(2) この方程式が $x = -1$ と $x = 2$ を解にもつから、次の2つの等式が成り立つ。

$$(-1)^2 + (a-b) \cdot (-1) + b = 0$$

$$2^2 + (a-b) \cdot 2 + b = 0$$

すなわち $a - 2b = 1, 2a - b = -4$

この連立方程式を解いて $a = -3, b = -2$

5 次の2次方程式が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

(1) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ (2) $x^2 + mx + m + 3 = 0$

解答 (1) $m = 4$, 重解は $x = 3$

(2) $m = -2$ のとき重解 $x = 1, m = 6$ のとき重解 $x = -3$

解説

(1) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m + 1) = 32 - 8m$$

2次方程式が重解をもつのは $D = 0$ のときであるから $32 - 8m = 0$

よって $m = 4$

また、重解は $x = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$

(2) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) = m^2 - 4m - 12$$

2次方程式が重解をもつのは $D = 0$ のときであるから $m^2 - 4m - 12 = 0$

すなわち $(m+2)(m-6) = 0$

よって $m = -2, 6$

また、重解は $x = -\frac{m}{2}$ であるから

$m = -2$ のとき $x = 1, m = 6$ のとき $x = -3$

6 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 + 2x + 5 = 0$ (2) $-2x^2 - 5x + 1 = 0$ (3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

解答 (1) 0個 (2) 2個 (3) 1個

解説

(1) $x^2 + 2x + 5 = 0$ の判別式を D とすると $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$

よって、実数解の個数は 0個

(2) $-2x^2 - 5x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 33 > 0$

よって、実数解の個数は 2個

(3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0$

よって、実数解の個数は 1個

7 次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2次方程式 $x^2 + 4x + m = 0$ が異なる2つの実数解をもつ。

(2) 2次方程式 $2x^2 - 3x + m - 1 = 0$ が実数解をもたない。

(3) 2次方程式 $3x^2 + 6x + 2m - 1 = 0$ が実数解をもつ。

解答 (1) $m < 4$ (2) $m > \frac{17}{8}$ (3) $m \leq 2$

解説

(1) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = -4m + 16$$

2次方程式が異なる2つの実数解をもつのは $D > 0$ のときであるから

$$-4m + 16 > 0$$

これを解いて $m < 4$

(2) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = -8m + 17$$

2次方程式が実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから

$$-8m + 17 < 0$$

これを解いて $m > \frac{17}{8}$

(3) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2m - 1) = -24m + 48$$

2次方程式が実数解をもつのは $D \geq 0$ のときであるから

$$-24m + 48 \geq 0$$

これを解いて $m \leq 2$

8 x の2次方程式 $x^2 + 2x + m = 0$ の実数解の個数を求めよ。

解答 $m < 1$ のとき 2個, $m = 1$ のとき 1個, $m > 1$ のとき 0個

解説

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4 - 4m = 4(1 - m)$$

[1] $D > 0$ すなわち $m < 1$ のとき

実数解の個数は 2個

[2] $D = 0$ すなわち $m = 1$ のとき

実数解の個数は 1個

[3] $D < 0$ すなわち $m > 1$ のとき

実数解の個数は 0個

以上から、 $m < 1$ のとき 2個

$m = 1$ のとき 1個

$m > 1$ のとき 0個

9 2つの2次方程式 $x^2 + 3x + m = 0, x^2 - x + 3m = 0$ が共通な解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、その共通な解を求めよ。

解答 $m = 0$ のとき 共通な解は $0, m = -10$ のとき 共通な解は -5

解説

共通な解を α とすると $\alpha^2 + 3\alpha + m = 0$ …… ①

$\alpha^2 - \alpha + 3m = 0$ …… ②

① から $m = -\alpha^2 - 3\alpha$ …… ③

これを②に代入して $\alpha^2 - \alpha + 3(-\alpha^2 - 3\alpha) = 0$

よって $2\alpha^2 + 10\alpha = 0$

すなわち $\alpha(\alpha + 5) = 0$

したがって $\alpha = 0, -5$

ゆえに、③ から、 $\alpha = 0$ のとき $m = 0$

$\alpha = -5$ のとき $m = -10$