数学演習（２次関数の決定･発展問題）Ｈ２２．６．２５　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1 (1) 2次関数のグラフが3点$(4,\ -4)$，$(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$を通るとき，その2次関数を求めよ。

(2) 放物線$y=ax^2+bx+c$をx軸方向に-1，y軸方向に2だけ平行移動すると放物線$y=4x^2+5x+7$になる。このとき，定数a，b，cの値を求めよ。

2 xの2次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフが相異なる3点$(a,\ b)$，$(b,\ c)$，$(c,\ a)$を通るものとする。ただし，$abc \fallingdotseq 0$とする。

(1) aの値を求めよ。

(2) b，cの値を求めよ。

3 2次関数$y=-2x^2+4x+1$のグラフの頂点と，2次関数$y=x^2+2ax+3a^2$のグラフの頂点を通る直線の方程式を$y=-3x+b$とするとき，定数bの値は$b=$ ア$\boxed{}$ であり，定数aの値のうち小さい方は$a=$ イ$\boxed{}$ である。

数学演習（２次関数の決定･発展問題）Ｈ２２．６．２５　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1) 2次関数のグラフが3点 $(4,\ -4)$，$(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に2だけ平行移動すると放物線 $y=4x^2+5x+7$ になる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答 (1) $y=-x^2+2x+4$　(2) $a=4$，$b=-3$，$c=4$

解説

(1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおく。

点 $(4,\ -4)$ を通るから　$-4=a\cdot 4^2+b\cdot 4+c$

すなわち　$16a+4b+c=-4$ ……①

点 $(-1,\ 1)$ を通るから　$1=a\cdot(-1)^2+b(-1)+c$

すなわち　$a-b+c=1$ ……②

点 $(2,\ 4)$ を通るから　$4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$

すなわち　$4a+2b+c=4$ ……③

①−② から　$15a+5b=-5$　よって　$3a+b=-1$ ……④

③−② から　$3a+3b=3$　よって　$a+b=1$ ……⑤

④−⑤ から　$2a=-2$　すなわち　$a=-1$ ……⑥

⑥ を ⑤ に代入して　$-1+b=1$　すなわち　$b=2$ ……⑦

⑥，⑦ を ② に代入すると　$-1-2+c=1$　よって　$c=4$

したがって，求める2次関数は　$y=-x^2+2x+4$

(2) 放物線 $y=4x^2+5x+7$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$y=4(x-1)^2+5(x-1)+7-2$　すなわち　$y=4x^2-3x+4$

したがって　$a=4$，$b=-3$，$c=4$

$\boxed{2}$ x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが相異なる3点 $(a,\ b)$，$(b,\ c)$，$(c,\ a)$ を通るものとする。ただし，$abc\neq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) b，c の値を求めよ。

解答 (1) $a=-1$　(2) $b=\dfrac{1}{2}$，$c=2$

解説

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが3点 $(a,\ b)$，$(b,\ c)$，$(c,\ a)$ を通るから

$b=a^3+ab+c$ ……①，　$c=ab^2+b^2+c$ ……②，　$a=ac^2+bc+c$ ……③

また，$abc\neq 0$ から　$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$

(1) ② から　$b^2(a+1)=0$

$b^2\neq 0$ であるから　$a+1=0$　よって　$a=-1$

これは $a\neq 0$ を満たす。

(2) $a=-1$ を ①，③ に代入すると，順に　$b=-1-b+c$，$-1=-c^2+bc+c$

前者から　$b=\dfrac{c-1}{2}$ ……④

④ を後者に代入して整理すると　$c^2-c-2=0$

よって，$(c+1)(c-2)=0$ から　$c=-1,\ 2$

$c=-1$ のとき ④ から　$b=-1$

このとき $a=b=c$ となり，3点 $(a,\ b)$，$(b,\ c)$，$(c,\ a)$ が相異なる3点という条件に反する。

$c=2$ のとき ④ から　$b=\dfrac{1}{2}$

これらは $b\neq 0$，$c\neq 0$ を満たす。

$\boxed{3}$ 2次関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフの頂点と，2次関数 $y=x^2+2ax+3a^2$ のグラフの頂点を通る直線の方程式を $y=-3x+b$ とするとき，定数 b の値は $b={}^{ア}\boxed{}$ であり，定数 a の値のうち小さい方は $a={}^{イ}\boxed{}$ である。

解答 (ア) 6　(イ) $\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}$

解説

$y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$，　$y=x^2+2ax+3a^2=(x+a)^2+2a^2$

よって，直線 $y=-3x+b$ は2点 $(1,\ 3)$，$(-a,\ 2a^2)$ を通るから

$3=-3+b$ ……①，　$2a^2=3a+b$ ……②

① から　$b={}^{ア}6$

これを ② に代入すると　$2a^2-3a-6=0$　これを解いて　$a=\dfrac{3\pm\sqrt{57}}{4}$

よって，小さい方は　$a={}^{イ}\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}$