数学演習（２次関数の決定）Ｈ２２．６．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の条件を満たすように，定数 a，b の値を定めよ。

(1)　放物線 $y=a(x-2)^2+4$ が点 $(1,\ 2)$ を通る。

(2)　放物線 $y=x^2+bx+2$ が点 $(2,\ 0)$ を通る。

$\boxed{2}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る。

$\boxed{3}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=1$ で，点 $(3,\ -1)$ を通り，y 軸と点 $(0,\ 2)$ で交わる。

$\boxed{4}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　$x=1$ で最小値 5 をとり，$x=3$ のとき $y=7$ となる。

(2)　$x=2$ で最大値 4 をとり，点 $(1,\ 2)$ を通る。

$\boxed{5}$ 2 次関数のグラフが次の 3 点を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

(1)　$(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$　　　(2)　$(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$

$\boxed{6}$ 次の条件を満たすような放物線の方程式を求めよ。

(1) 放物線 $y=-3x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，頂点が点 $(-2,\ 3)$ である。

(2) 放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線で，2 点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ を通る。

$\boxed{7}$ 2 つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ の頂点が一致するように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の (ア) ～ (エ) の条件のうち，2 つ以上の条件を満たす 2 次関数を考える。

(ア) x^2 の係数は 2 である。　(イ) グラフの頂点は点 $(2,\ -3)$ である。

(ウ) グラフは点 $(4,\ -1)$ を通る。　(エ) グラフは点 $(-1,\ -12)$ を通る。

(1) 2 つの条件を満たす 2 次関数がただ 1 つに決まるとき，その 2 つの条件の組とそのときの 2 次関数をすべて求めよ。

(2) 3 つの条件を満たす 2 次関数がただ 1 つに決まるとき，その 3 つの条件の組とそのときの 2 次関数をすべて求めよ。

数学演習（２次関数の決定）Ｈ２２．６．２０　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の条件を満たすように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) 放物線 $y=a(x-2)^2+4$ が点 $(1,\ 2)$ を通る。

(2) 放物線 $y=x^2+bx+2$ が点 $(2,\ 0)$ を通る。

解答 (1) $a=-2$　(2) $b=-3$

解説

(1) 条件から　$2=a(1-2)^2+4$

すなわち　$2=a+4$

よって　$a=-2$

(2) 条件から　$0=2^2+b\cdot 2+2$

すなわち　$0=4+2b+2$

よって　$b=-3$

2 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2) 頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る。

解答 (1) $y=-(x-1)^2-2\ (y=-x^2+2x-3)$　(2) $y=2(x+1)^2+3\ (y=2x^2+4x+5)$

解説

(1) 頂点が点 $(1,\ -2)$ であるから，求める２次関数は $y=a(x-1)^2-2$ と表される。

グラフが点 $(2,\ -3)$ を通るから　$-3=a-2$　よって　$a=-1$

ゆえに，求める２次関数は　$y=-(x-1)^2-2$　$(y=-x^2+2x-3)$

(2) 頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める２次関数は $y=a(x+1)^2+3$ と表される。

グラフが点 $(1,\ 11)$ を通るから　$11=4a+3$　よって　$a=2$

ゆえに，求める２次関数は　$y=2(x+1)^2+3$　$(y=2x^2+4x+5)$

3 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1) 軸が直線 $x=-2$ で，２点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=1$ で，点 $(3,\ -1)$ を通り，y 軸と点 $(0,\ 2)$ で交わる。

解答 (1) $y=(x+2)^2-1\ (y=x^2+4x+3)$　(2) $y=-(x-1)^2+3\ (y=-x^2+2x+2)$

解説

(1) 軸が直線 $x=-2$ であるから，求める２次関数は $y=a(x+2)^2+q$ と表される。

グラフが２点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通るから　$3=4a+q$，$0=a+q$

これを解くと　$a=1$，$q=-1$

よって，求める２次関数は　$y=(x+2)^2-1$　$(y=x^2+4x+3)$

(2) 軸が直線 $x=1$ であるから，求める２次関数は $y=a(x-1)^2+q$ と表される。

グラフが２点 $(3,\ -1)$，$(0,\ 2)$ を通るから　$-1=4a+q$，$2=a+q$

これを解くと　$a=-1$，$q=3$

よって，求める２次関数は　$y=-(x-1)^2+3$　$(y=-x^2+2x+2)$

4 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1) $x=1$ で最小値５をとり，$x=3$ のとき $y=7$ となる。

(2) $x=2$ で最大値４をとり，点 $(1,\ 2)$ を通る。

解答 (1) $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5\left(y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{11}{2}\right)$

(2) $y=-2(x-2)^2+4\ (y=-2x^2+8x-4)$

解説

(1) $x=1$ で最小値５をとるから，求める２次関数は $y=a(x-1)^2+5$ $(a>0)$ と表される。

$x=3$ のとき $y=7$ であるから　$7=4a+5$　よって　$a=\dfrac{1}{2}$

これは $a>0$ を満たす。

ゆえに，求める２次関数は　$y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5$　$\left(y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{11}{2}\right)$

(2) $x=2$ で最大値４をとるから，求める２次関数は $y=a(x-2)^2+4$ $(a<0)$ と表される。

グラフが点 $(1,\ 2)$ を通るから　$2=a+4$　よって　$a=-2$

これは $a<0$ を満たす。

ゆえに，求める２次関数は　$y=-2(x-2)^2+4$　$(y=-2x^2+8x-4)$

5 ２次関数のグラフが次の３点を通るとき，その２次関数を求めよ。

(1) $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$　(2) $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$

解答 (1) $y=2x^2-5x+2$　(2) $y=3x^2-2x$

解説

(1) 求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが３点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=9 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 4a+2b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$2b=-10$　よって　$b=-5$

③−② から　$3a+b=1$　……④

$b=-5$ を ④ に代入して　$3a-5=1$　よって　$a=2$

$a=2$，$b=-5$ を ① に代入して　$2+5+c=9$　よって　$c=2$

したがって，求める２次関数は　$y=2x^2-5x+2$

(2) 求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが３点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=16 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=21 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−② から　$3a-3b=15$　よって　$a-b=5$　……④

③−② から　$8a+2b=20$　よって　$4a+b=10$　……⑤

④＋⑤ から　$5a=15$　よって　$a=3$

$a=3$ を ④ に代入して　$3-b=5$　よって　$b=-2$

$a=3$，$b=-2$ を ② に代入して　$3-2+c=1$　よって　$c=0$

したがって，求める２次関数は　$y=3x^2-2x$

6 次の条件を満たすような放物線の方程式を求めよ。

(1) 放物線 $y=-3x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，頂点が点 $(-2,\ 3)$ である。

(2) 放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線で，２点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ を通る。

解答 (1) $y=-3(x+2)^2+3\ (y=-3x^2-12x-9)$　(2) $y=x^2-4x+5$

解説

(1) 放物線 $y=-3x^2+x-1$ を平行移動した曲線であるから，x^2 の係数は -3 である。

また，頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，求める放物線の方程式は

$y=-3(x+2)^2+3$　$(y=-3x^2-12x-9)$

(2) 放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線であるから，求める放物線の方程式は

$y=x^2+bx+c$

と表される。

これが２点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ を通るから　$4+2b+c=1$，$16+4b+c=5$

すなわち　$2b+c=-3$，$4b+c=-11$

これを解いて　$b=-4$，$c=5$

よって，求める放物線の方程式は　$y=x^2-4x+5$

7 ２つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ の頂点が一致するように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{9}{8}$

解説

$y=x^2-3x$ を変形すると　$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$　……①

$y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ を変形すると　$y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2-\dfrac{a^2}{2}+b$　……②

よって，①，② の頂点の座標はそれぞれ　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$，$\left(-a,\ -\dfrac{a^2}{2}+b\right)$

この２点が一致するとき　$\dfrac{3}{2}=-a$，$-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{a^2}{2}+b$

これを解いて　$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{9}{8}$

8 放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

解答 $y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$y=2(x-p)^2+2p-3$　……①

と表される。

これが点 $(1,\ 3)$ を通るから　$3=2(1-p)^2+2p-3$

整理して　$p^2-p-2=0$

よって　$(p+1)(p-2)=0$　ゆえに　$p=-1,\ 2$

① に代入して　$y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$

$(y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$　でもよい$)$

9 次の (ア)～(エ) の条件のうち，２つ以上の条件を満たす２次関数を考える。

(ア) x^2 の係数は２である。　(イ) グラフの頂点は点 $(2,\ -3)$ である。

(ウ) グラフは点 $(4,\ -1)$ を通る。　(エ) グラフは点 $(-1,\ -12)$ を通る。

(1) ２つの条件を満たす２次関数がただ１つに決まるとき，その２つの条件の組とそのときの２次関数をすべて求めよ。

(2) ３つの条件を満たす２次関数がただ１つに決まるとき，その３つの条件の組とそのときの２次関数をすべて求めよ。

解答 (1) (ア)，(イ) のとき　$y=2(x-2)^2-3\ (y=2x^2-8x+5)$

(イ)，(ウ) のとき　$y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3\ \left(y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-1\right)$

(イ)，(エ) のとき　$y=-(x-2)^2-3\ (y=-x^2+4x-7)$

(2) (ア)，(ウ)，(エ) のとき　$y=2x^2-\dfrac{19}{5}x-\dfrac{89}{5}$

解説

(1) (イ) を満たすとき，求める２次関数は

$y=a(x-2)^2-3$　……①

の形に表される。

(イ) を含む 2 つの条件の組は，以下の [1]，[2]，[3] の場合である。

[1]　(ア)，(イ) のとき

(ア) より $a=2$ であるから，求める 2 次関数は　$y=2(x-2)^2-3$

[2]　(イ)，(ウ) のとき

① のグラフが点 $(4,\ -1)$ を通るから　$-1=a(4-2)^2-3$

よって　$a=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める 2 次関数は　$y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3$

[3]　(イ)，(エ) のとき

① のグラフが点 $(-1,\ -12)$ を通るから　$-12=a(-1-2)^2-3$

よって　$a=-1$

したがって，求める 2 次関数は　$y=-(x-2)^2-3$

(イ) を満たさないとき，2 つの条件の組は

{(ア)，(ウ)}，{(ア)，(エ)}，{(ウ)，(エ)}

の 3 通りあるが，どの場合でも 2 次関数はただ 1 つに決まらない。

以上から

(ア)，(イ) のとき　$y=2(x-2)^2-3$ $(y=2x^2-8x+5)$

(イ)，(ウ) のとき　$y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3$ $\left(y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-1\right)$

(イ)，(エ) のとき　$y=-(x-2)^2-3$ $(y=-x^2+4x-7)$

(2)　(1) から，(イ) を満たすとき，(ア)，(ウ)，(エ) のうち 1 つの条件を満たせば 2 次関数はただ 1 つに決まり，それら 3 つの 2 次関数はすべて異なる。

よって，(イ) を満たすとき，3 つの条件を満たす 2 次関数は存在しない。

ゆえに，3 つの条件 (ア)，(ウ)，(エ) を満たす場合を考える。

(ア) を満たすとき，求める 2 次関数は

$y=2x^2+bx+c$　…… ②

の形に表される。

② のグラフが 2 点 $(4,\ -1)$，$(-1,\ -12)$ を通るから

$-1=32+4b+c$，$-12=2-b+c$

すなわち　$4b+c=-33$，$b-c=14$

これを解いて　$b=-\dfrac{19}{5}$，$c=-\dfrac{89}{5}$

よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-\dfrac{19}{5}x-\dfrac{89}{5}$

したがって，(ア)，(ウ)，(エ) のとき　$y=2x^2-\dfrac{19}{5}x-\dfrac{89}{5}$