数学演習（２次関数の最大•最小）　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-4x-4$　(2) $y=-x^2+2x-3$　(3) $y=3x^2+12x-6$

(4) $y=2x^2-4x+5$　(5) $y=2(x-1)(x+4)$　(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+x$

2 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$　(2) $y=x^2+4x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y=x^2+2x-3$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$　(4) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ $(-2 \leqq x \leqq 6)$

3 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-2x^2-4x+1$ $(-2 \leqq x < 1)$　(2) $y=x^2+3x+3$ $(0 < x \leqq 2)$

(3) $y=3(x+1)(x-2)$ $(0 \leqq x < 3)$　(4) $y=x^2-2x+2$ $(-1 < x < 2)$

4 次の条件に適するように，定数 a の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2+2x+a$ の最小値が -3 である。

(2) 関数 $y=-x^2+ax-2a$ の最大値が 5 である。

(3) 関数 $y=x^2-4x+a$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 6 である。

(4) 関数 $y=-x^2+3x+a$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 4 である。

(5) 関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が，関数 $y=x^2-4x$ の最小値と一致する。

5 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 c の値を定めよ。
また，そのときの最大値を求めよ。

6 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 次の各場合について，最小値を求めよ。

[1] $a<0$　[2] $0\leqq a\leqq 2$　[3] $2<a$

(2) 次の各場合について，最大値を求めよ。

[1] $a<1$　[2] $a=1$　[3] $1<a$

$\boxed{7}$ 関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最大値を求めよ。

(2) 最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ $a<0$ とする。関数 $y=-x^2+2ax+3a$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値が -11 であるように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{9}$ $0<a<2$ とする。関数 $y=x^2-2ax+2a$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 10 であるように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{10}$ 関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{11}$ 関数 $y=2x^2-4ax$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{13}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

$\boxed{14}$ (1) $1 \leqq x \leqq 3$ における，1 次関数 $y=ax+b$ の最大値が 2，最小値が 0 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) $1 \leqq x \leqq 4$ における，2 次関数 $y=ax^2-4ax+b$ の最大値が 12，最小値が 4 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{15}$ a は正の定数とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0 \leqq x \leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

$\boxed{16}$ k は定数とする。2 次関数 $y=x^2+2kx+k$ の最小値を m とする。

(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。

(2) k の関数 m の最大値とそのときの k の値を求めよ。

$\boxed{17}$ (1) $2x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2) $x+2y+3=0$ のとき，xy の最大値を求めよ。

$\boxed{18}$ $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

19 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-2x^4+4x^2+3$

(2) $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

20 関数 $y=-x^2+2ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を $M(a)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $a<0$，$0\leqq a\leqq 1$，$1<a$ の各場合について，$M(a)$ を求めよ。

(2) $M(a)$ のグラフをかけ。

21 関数 $f(x)=-x^2+2x+2$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。$M(a)$ および $m(a)$ を求め，そのグラフをかけ。

$\boxed{22}$ 関数 $y=x^2-2x+m$ の値が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で常に負となるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{23}$ 周囲の長さが 20 cm である長方形について，次の問いに答えよ。

(1) この長方形の面積の最大値を求めよ。また，このとき，長方形はどのような形か。

(2) この長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{24}$ 点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(4,\ 16)$ の間にある。このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-4x-4$ (2) $y=-x^2+2x-3$ (3) $y=3x^2+12x-6$

(4) $y=2x^2-4x+5$ (5) $y=2(x-1)(x+4)$ (6) $y=-\frac{1}{2}x^2+x$

解答 (1) 最大値はない，$x=2$ で最小値 -8 (2) $x=1$ で最大値 -2，最小値はない

(3) 最大値はない，$x=-2$ で最小値 -18

(4) 最大値はない，$x=1$ で最小値 3

(5) 最大値はない，$x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{2}$

(6) $x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$，最小値はない

解説

(1) $y=x^2-4x-4=\{(x-2)^2-2^2\}-4=(x-2)^2-8$

よって，$x=2$ で最小値 -8 をとる。

最大値はない。

(2) $y=-x^2+2x-3=-(x^2-2x)-3=-\{(x-1)^2-1^2\}-3=-(x-1)^2-2$

よって，$x=1$ で最大値 -2 をとる。

最小値はない。

(3) $y=3x^2+12x-6=3(x^2+4x)-6=3\{(x+2)^2-2^2\}-6=3(x+2)^2-18$

よって，$x=-2$ で最小値 -18 をとる。

最大値はない。

(4) $y=2x^2-4x+5=2(x^2-2x)+5=2\{(x-1)^2-1^2\}+5=2(x-1)^2+3$

よって，$x=1$ で最小値 3 をとる。

最大値はない。

(5) $y=2(x-1)(x+4)=2(x^2+3x-4)=2(x^2+3x)-8$

$=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-8=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$

よって，$x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{2}$ をとる。

最大値はない。

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x^2-2x)=-\frac{1}{2}\{(x-1)^2-1^2\}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

よって，$x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

最小値はない。

$\boxed{2}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ (2) $y=x^2+4x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(3) $y=x^2+2x-3$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ (4) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ $(-2\leqq x\leqq 6)$

解答 (1) $x=0$ で最大値 0，$x=3$ で最小値 -9

(2) $x=1$ で最大値 5，$x=-1$ で最小値 -3

(3) $x=-3$，1 で最大値 0，$x=-1$ で最小値 -4

(4) $x=2$ で最大値 1，$x=-2$，6 で最小値 -7

解説

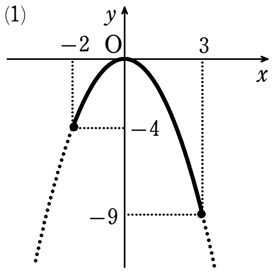
(1) グラフは [図] の実線部分である。

したがって

$x=0$ で最大値 0，

$x=3$ で最小値 -9 をとる。

(1)



(2) 関数の式を変形すると

$y=(x+2)^2-4$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

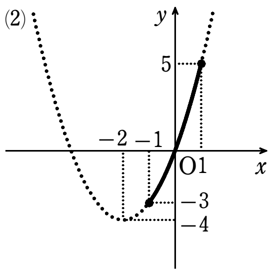
よって，そのグラフは [図] の実線部分である。

したがって

$x=1$ で最大値 5，

$x=-1$ で最小値 -3 をとる。

(2)



(3) 関数の式を変形すると

$y=(x+1)^2-4$ $(-3\leqq x\leqq 1)$

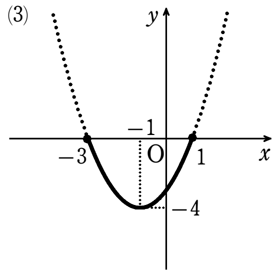
よって，そのグラフは [図] の実線部分である。

したがって

$x=-3$，1 で最大値 0，

$x=-1$ で最小値 -4 をとる。

(3)



(4) 関数の式を変形すると

$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ $(-2\leqq x\leqq 6)$

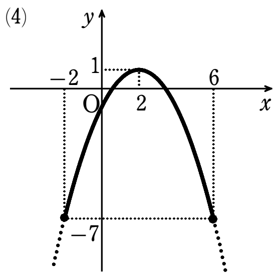
よって，そのグラフは [図] の実線部分である。

したがって

$x=2$ で最大値 1，

$x=-2$，6 で最小値 -7 をとる。

(4)



$\boxed{3}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-2x^2-4x+1$ $(-2\leqq x<1)$ (2) $y=x^2+3x+3$ $(0<x\leqq 2)$

(3) $y=3(x+1)(x-2)$ $(0\leqq x<3)$ (4) $y=x^2-2x+2$ $(-1<x<2)$

解答 (1) $x=-1$ で最大値 3，最小値はない (2) $x=2$ で最大値 13，最小値はない

(3) 最大値はない，$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{27}{4}$ (4) 最大値はない，$x=1$ で最小値 1

解説

(1) 関数の式を変形すると

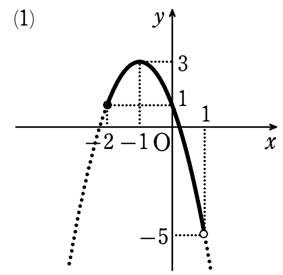
$y=-2(x+1)^2+3$ $(-2\leqq x<1)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

したがって，$x=-1$ で最大値 3 をとる。

最小値はない。

(1)



(2) 関数の式を変形すると

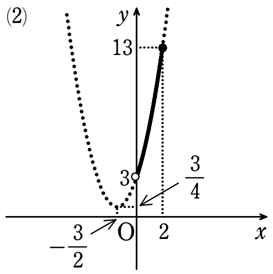
$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $(0<x\leqq 2)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

したがって，$x=2$ で最大値 13 をとる。

最小値はない。

(2)



(3) 関数の式を変形すると

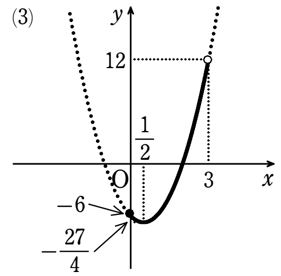
$y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$ $(0\leqq x<3)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

したがって，$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{27}{4}$ をとる。

最大値はない。

(3)



(4) 関数の式を変形すると

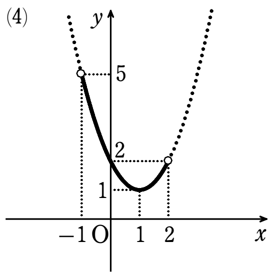
$y=(x-1)^2+1$ $(-1<x<2)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

したがって，$x=1$ で最小値 1 をとる。

最大値はない。

(4)



$\boxed{4}$ 次の条件に適するように，定数 a の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2+2x+a$ の最小値が -3 である。

(2) 関数 $y=-x^2+ax-2a$ の最大値が 5 である。

(3) 関数 $y=x^2-4x+a$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 6 である。

(4) 関数 $y=-x^2+3x+a$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 4 である。

(5) 関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が，関数 $y=x^2-4x$ の最小値と一致する。

解答 (1) $a=-2$ (2) $a=-2$，10 (3) $a=1$ (4) $a=2$ (5) $a=-8$

解説

(1) $y=x^2+2\cdot 1x+1^2-1^2+a=(x+1)^2-1+a$

よって $-1+a=-3$ ゆえに $a=-2$

(2) $y=-\left\{x^2-2\cdot\frac{a}{2}x+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}-2a=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-2a$

よって　$\dfrac{a^2}{4}-2a=5$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

したがって　$a-10=0,\ a+2=0$　　よって　$a=10,\ -2$

(3)　$y=x^2-2\cdot2x+2^2-2^2+a=(x-2)^2-4+a$　　軸は $x=2$

よって　$1\leqq x\leqq5$ において

$y=f(x)$ とおくと，$f(1)<f(5)$ であるから　最大値は　$f(5)$

$f(5)=5^2-4\cdot5+a$　よって　$25-20+a=6$　　すなわち　$a=1$

(4)　$y=-\left\{x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+a=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}+a$　　軸は $x=\dfrac{3}{2}$

よって　$-3\leqq x\leqq1$ において　$y=f(x)$ とおくと $f(-3)<f(1)$

したがって，最大値は $f(1)=-1^2+3\cdot1+a$

よって　$-1+3+a=4$　　すなわち $a=2$

(5)　$y=-(x^2+2\cdot2x+2^2-2^2)+a=-(x+2)^2+4+a$

$x=-2$ のとき，最大値 $4+a$

$y=x^2-2\cdot2x+2^2-2^2=(x-2)^2-4$

$x=2$ のとき，最小値 -4

$y=-x^2-4x+a$ の最大値が $y=x^2-4x$ の最小値と一致するから

$4+a=-4$　よって　$a=-8$

$\boxed{5}$ 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq4)$ の最小値が -2 であるように，定数 c の値を定めよ。
また，そのときの最大値を求めよ。

解答　$c=-7$，$x=3$ で最大値 2

解説

$y=-x^2+6x+c=-(x-3)^2+9+c$

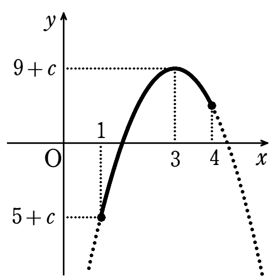
よって，この関数は $x=1$ で最小値をとる。

$x=1$ のとき　　$y=-1^2+6\cdot1+c=5+c$

最小値が -2 であるとき　　$5+c=-2$

したがって　　$c=-7$

このとき，$x=3$ で最大値 $9+c=2$ をとる。



$\boxed{6}$ 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　次の各場合について，最小値を求めよ。

[1]　$a<0$　　[2]　$0\leqq a\leqq2$　　[3]　$2<a$

(2)　次の各場合について，最大値を求めよ。

[1]　$a<1$　　[2]　$a=1$　　[3]　$1<a$

解答　(1)　[1]　$x=0$ で最小値 2　　[2]　$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

[3]　$x=2$ で最小値 $14-12a$

(2)　[1]　$x=2$ で最大値 $14-12a$　　[2]　$x=0$，2 で最大値 2

[3]　$x=0$ で最大値 2

解説

$y=3x^2-6ax+2=3(x-a)^2-3a^2+2$ $(0\leqq x\leqq2)$

$x=0$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=14-12a$，

$x=a$ のとき $y=-3a^2+2$

(1)　[1]　$a<0$ のとき　グラフは [図] の実線部分のようになる。

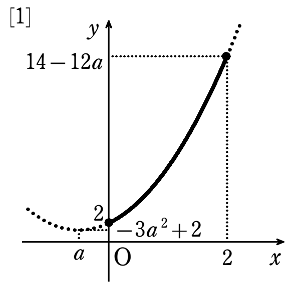
よって，$x=0$ で最小値 2 をとる。

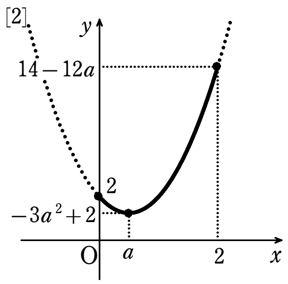
[2]　$0\leqq a\leqq2$ のとき　グラフは [図] の実線部分のようになる。

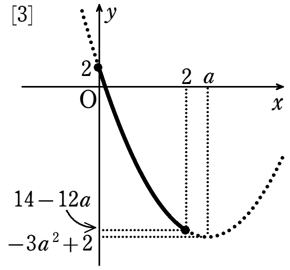
よって，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。

[3]　$2<a$ のとき　グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $14-12a$ をとる。







(2)　[1]　$a<1$ のとき　グラフは [図] の実線部分のようになる。

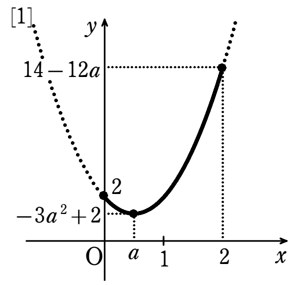
よって，$x=2$ で最大値 $14-12a$ をとる。

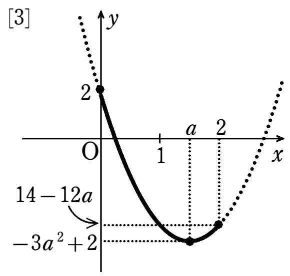
[2]　$a=1$ のとき　$y=3(x-1)^2-1$ $(0\leqq x\leqq2)$

よって，$x=0$，2 で最大値 2 をとる。

[3]　$1<a$ のとき　グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 2 をとる。





$\boxed{7}$ 関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0\leqq x\leqq2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$，$0\leqq a\leqq1$ のとき $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$，
$1<a$ のとき $x=2$ で最大値 $7a-4$

(2)　$a<\dfrac{1}{2}$ のとき $x=2$ で最小値 $7a-4$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{1}{2}<a$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$

解説

$y=-x^2+4ax-a=-(x-2a)^2+4a^2-a$　$(0\leqq x\leqq2)$

$x=0$ のとき　$y=-a$，$x=2$ のとき　$y=7a-4$，$x=2a$ のとき　$y=4a^2-a$

(1)　[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 $-a$　をとる。

[2]　$0\leqq2a\leqq2$ すなわち $0\leqq a\leqq1$ のとき

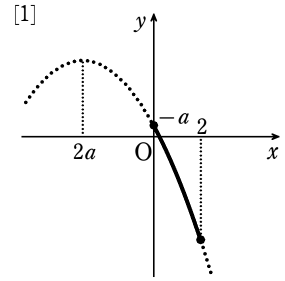
グラフは [図] の実線部分のようになる。

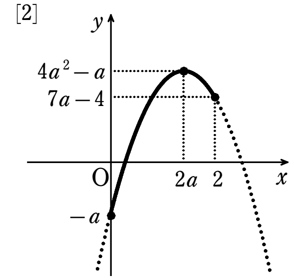
よって，$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$　をとる。

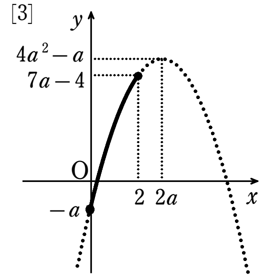
[3]　$2<2a$　すなわち　$1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $7a-4$　をとる。







(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$2a<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $7a-4$　をとる。

[2]　$2a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

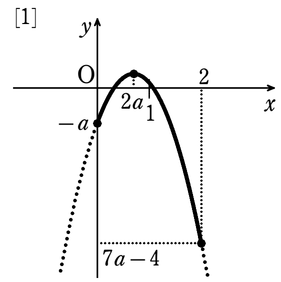
グラフは [図] の実線部分のようになる。

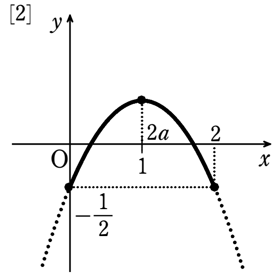
よって，$x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

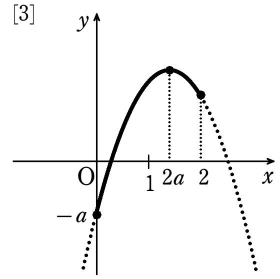
[3]　$2a>1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$　をとる。







$\boxed{8}$ $a<0$ とする。関数 $y=-x^2+2ax+3a$ $(0\leqq x\leqq1)$ の最小値が -11 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=-2$

解説

$y=-x^2+2ax+3a=-(x-a)^2+a^2+3a \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

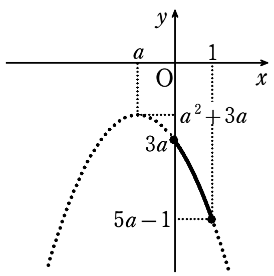
$a<0$ であるから，与えられた関数のグラフは，[図] の実線部分のようになる。

よって，この関数は $x=1$ で最小値 $5a-1$ をとる。

最小値が -11 であるとき　　$5a-1=-11$

したがって　　$a=-2$

これは $a<0$ を満たす。



$\boxed{9}$ $0<a<2$ とする。関数 $y=x^2-2ax+2a$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 10 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

$y=x^2-2ax+2a=(x^2-2ax+a^2)-a^2+2a$

$=(x-a)^2-a^2+2a$

$0<a<2$ であるから，与えられた関数のグラフは，右の図の実線部分のようになる。

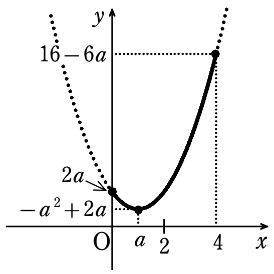
よって，この関数は

$x=4$ で最大値 $16-6a$

をとる。

最大値が 10 であるとき　　$16-6a=10$

よって　　$a=1$　　　　これは $0<a<2$ を満たす。



$\boxed{10}$ 関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

$y=x^2-2ax-a=(x-a)^2-a^2-a \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

[1]　$a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

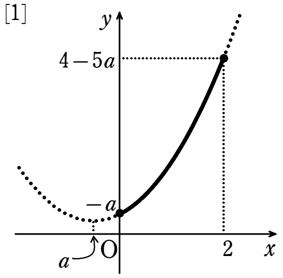
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

条件から　　$-a=-2$

よって　　$a=2$

これは $a<0$ を満たさない。

[1]



[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-a^2-a$ をとる。

条件から　$-a^2-a=-2$

$a^2+a-2=0$

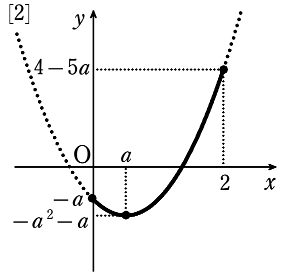
$(a-1)(a+2)=0$

よって　　$a=1,\ -2$

このうち，$0 \leqq a \leqq 2$ を満たすものは

$a=1$

[2]



[3]　$2<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $4-5a$ をとる。

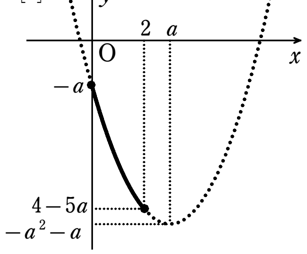
条件から　$4-5a=-2$

よって　　　$a=\dfrac{6}{5}$

これは $2<a$ を満たさない。

以上から　　　$a=1$

[3]



$\boxed{11}$ 関数 $y=2x^2-4ax$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最小値 0，$0 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2$，
$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $8-8a$

(2)　$a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $8-8a$，$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 0，
$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 0

解説

$y=2x^2-4ax=2(x-a)^2-2a^2$

$x=0$ のとき $y=0$，　$x=2$ のとき $y=8-8a$，　$x=a$ のとき $y=-2a^2$

(1)　[1]　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 0

[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2$

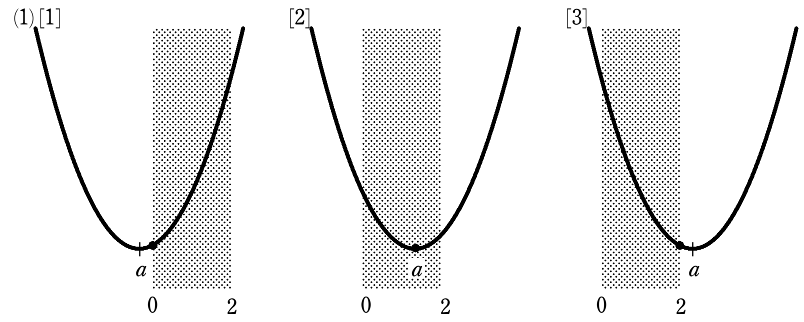
[3]　$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $8-8a$

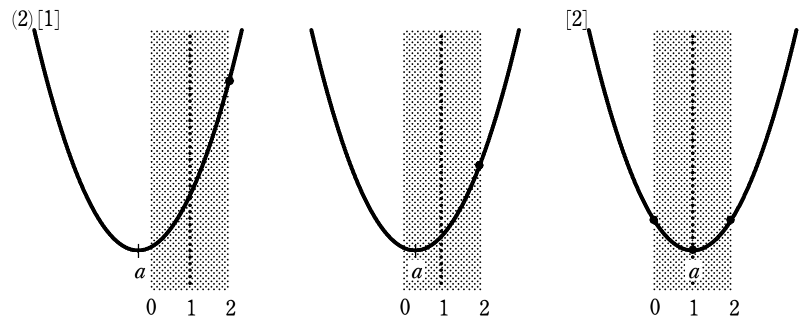
(2)　定義域の中央の値は 1

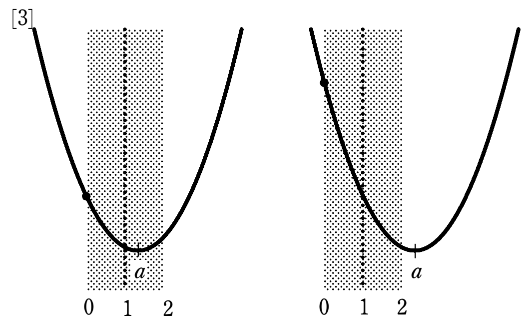
[1]　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $8-8a$

[2]　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 0

[3]　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0







$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最小値を求めよ。

解答　$a<1$ のとき $x=a+1$ で最小値 a^2-2a，$1 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=2$ で最小値 -1，
$2<a$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-4a+3

解説

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$x=a$ のとき $y=a^2-4a+3$，　$x=a+1$ のとき $y=a^2-2a$，　$x=2$ のとき $y=-1$

[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき

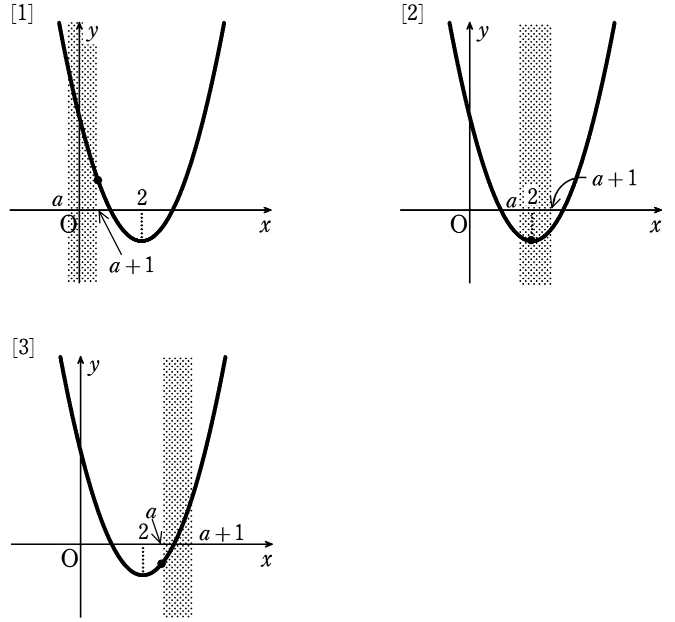
$x=a+1$ で最小値 a^2-2a

[2]　$a \leqq 2 \leqq a+1$ すなわち $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$x=2$ で最小値 -1

[3]　$2<a$ のとき

$x=a$ で最小値 a^2-4a+3



13 a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

解答 (1) $a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 0

$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a+1

(2) $a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a+1

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2

解説

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$，$x=a+1$ のとき　$y=a^2$，$x=1$ のとき　$y=0$

(1) [1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2]　$a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

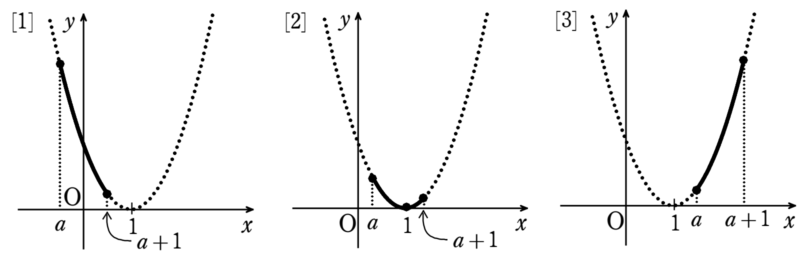
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ で最小値 0　をとる。

[3]　$1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1　をとる。



(2)　定義域の中央の値は　$a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1　をとる。

[2]　$a+\dfrac{1}{2}=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

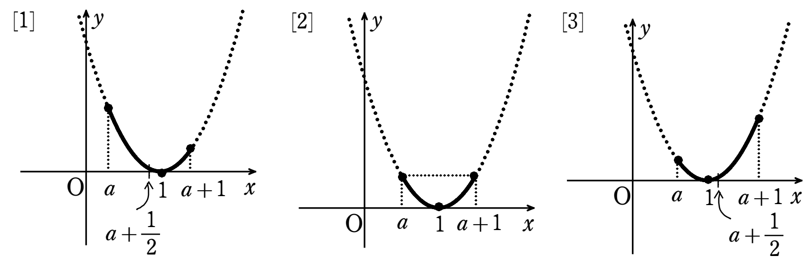
このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

よって，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$　をとる。

[3]　$1<a+\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{1}{2}<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最大値 a^2　をとる。



14 (1)　$1\leqq x\leqq 3$ における，1 次関数 $y=ax+b$ の最大値が 2，最小値が 0 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2)　$1\leqq x\leqq 4$ における，2 次関数 $y=ax^2-4ax+b$ の最大値が 12，最小値が 4 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　(1)　$(a,\ b)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 3)$

(2)　$(a,\ b)=(2,\ 12)$，$(-2,\ 4)$

解説

(1)　$f(x)=ax+b$ とおく。

[1]　$a>0$ のとき　$f(3)=2$，$f(1)=0$

よって　$3a+b=2$，$a+b=0$　　ゆえに　$a=1$，$b=-1$

[2]　$a<0$ のとき　$f(1)=2$，$f(3)=0$

よって　$a+b=2$，$3a+b=0$　　ゆえに　$a=-1$，$b=3$

[1]，[2] から　$(a,\ b)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 3)$

(2)　$f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$ とおく。

[1]　$a>0$ のとき　$f(4)=12$，$f(2)=4$

よって　$b=12$，$-4a+b=4$　　ゆえに　$a=2$，$b=12$

[2]　$a<0$ のとき　$f(2)=12$，$f(4)=4$

よって　$-4a+b=12$，$b=4$　　ゆえに　$a=-2$，$b=4$

[1]，[2] から　$(a,\ b)=(2,\ 12)$，$(-2,\ 4)$

15 a は正の定数とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$0<a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a-1

$1\leqq a$ のとき　$x=1$ で最小値 -2

(2)　$0<a<2$ のとき　$x=0$ で最大値 -1

$a=2$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1

$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

解説

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$　$(0\leqq x\leqq a)$

$x=0$ のとき　$y=-1$，

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a-1$，

$x=1$ のとき　$y=-2$

(1)　[1]　$0<a<1$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって

$x=a$ で最小値 a^2-2a-1

をとる。

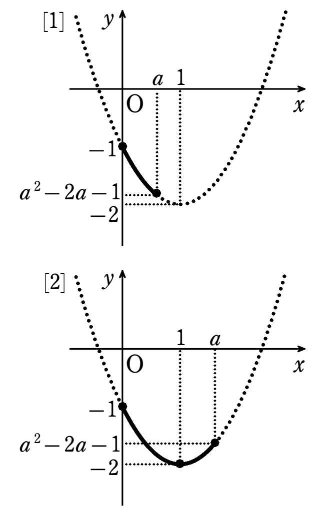
[2]　$1\leqq a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって

$x=1$ で最小値 -2

をとる。



(2)　定義域の中央の値は　$\dfrac{a}{2}$

[1]　$0<\dfrac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって

$x=0$ で最大値 -1

をとる。

[2]　$\dfrac{a}{2}=1$ すなわち $a=2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって

$x=0$，2 で最大値 -1

をとる。

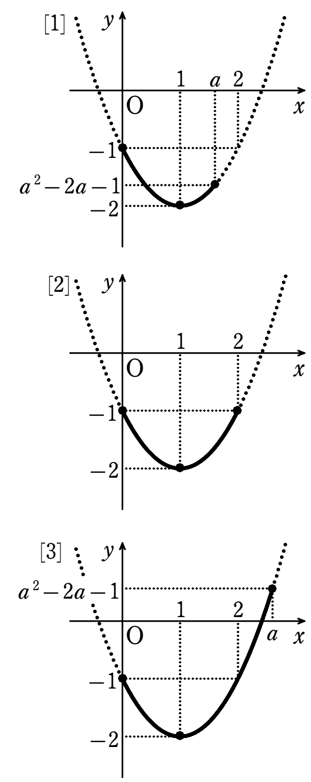
[3]　$1<\dfrac{a}{2}$ すなわち $2<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって

$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

をとる。



16 k は定数とする。2 次関数 $y=x^2+2kx+k$ の最小値を m とする。
(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。
(2) k の関数 m の最大値とそのときの k の値を求めよ。

解答 (1) $m=-k^2+k$ (2) $k=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$

解説
(1) $y=x^2+2kx+k=(x+k)^2-k^2+k$
よって，y は $x=-k$ で最小値 $-k^2+k$ をとるから $m=-k^2+k$
(2) $m=-k^2+k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$
よって，m は $k=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

17 (1) $2x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。
(2) $x+2y+3=0$ のとき，xy の最大値を求めよ。

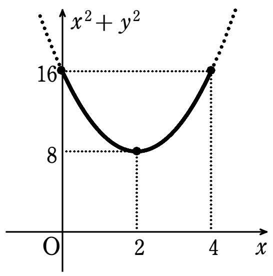
解答 (1) $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ (2) $x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

解説
(1) $2x+y=1$ から $y=1-2x$
よって $x^2+y^2=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$
ゆえに，$x=\frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。このとき $y=1-2\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$
したがって $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$
(2) $x+2y+3=0$ から $x=-2y-3$
よって $xy=(-2y-3)y=-2y^2-3y=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$
ゆえに，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。このとき $x=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-3=-\frac{3}{2}$
したがって $x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

18 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答 $0\leqq x\leqq 4$；$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16；$x=y=2$ で最小値 8

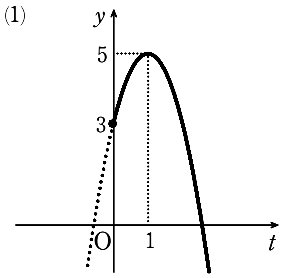
解説
$x+y=4$ から $y=4-x$ ……①
$y\geqq 0$ から $4-x\geqq 0$ よって $x\leqq 4$
$x\geqq 0$ と合わせて $0\leqq x\leqq 4$ ……②
また $x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16$
$=2(x-2)^2+8$
よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は
$x=0$ または $x=4$ で最大値 16,
$x=2$ で最小値 8 をとる。
ここで，① から
$x=0$ のとき $y=4$，$x=4$ のとき $y=0$，$x=2$ のとき $y=2$
以上から，x^2+y^2 は
$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16，$x=y=2$ で最小値 8 をとる。



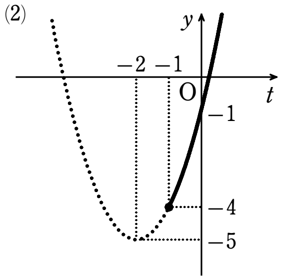
19 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。
(1) $y=-2x^4+4x^2+3$ (2) $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

解答 (1) $x=\pm 1$ で最大値 5，最小値はない
(2) 最大値はない，$x=1$ で最小値 -4

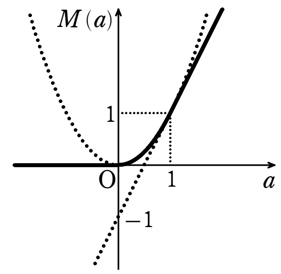
解説
(1) $x^2=t$ とおくと $t\geqq 0$
また $y=-2x^4+4x^2+3$
$=-2t^2+4t+3$
$=-2(t-1)^2+5$
このグラフは，[図] の実線部分のようになる。
したがって，y は
$t=1$ すなわち $x=\pm 1$ で最大値 5 をとる。
最小値はない。

(1)


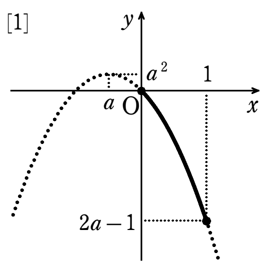
(2) $x^2-2x=t$ とおくと
$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$
よって $t\geqq -1$
また $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$
$=t^2+4t-1$
$=(t+2)^2-5$
このグラフは，[図] の実線部分のようになる。
したがって，y は
$t=-1$ すなわち $x=1$ で最小値 -4 をとる。
最大値はない。

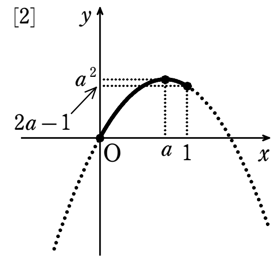
(2)


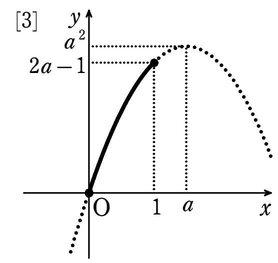
20 関数 $y=-x^2+2ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を $M(a)$ とする。次の問いに答えよ。
(1) $a<0$，$0\leqq a\leqq 1$，$1<a$ の各場合について，$M(a)$ を求めよ。
(2) $M(a)$ のグラフをかけ。

解答 (1) $a<0$ のとき $M(a)=0$， $0\leqq a\leqq 1$ のとき $M(a)=a^2$，
$1<a$ のとき $M(a)=2a-1$
(2)


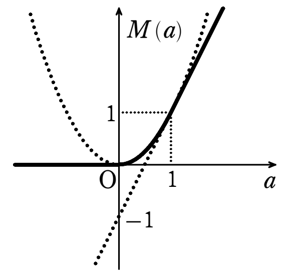
解説
(1) $y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$
$x=0$ のとき $y=0$， $x=1$ のとき $y=2a-1$,
$x=a$ のとき $y=a^2$
[1] $a<0$ のとき
$x=0$ で最大 よって $M(a)=0$
[2] $0\leqq a\leqq 1$ のとき
$x=a$ で最大 よって $M(a)=a^2$
[3] $1<a$ のとき
$x=1$ で最大 よって $M(a)=2a-1$

[1]


[2]


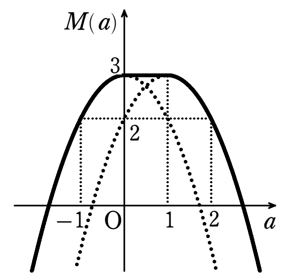
[3]


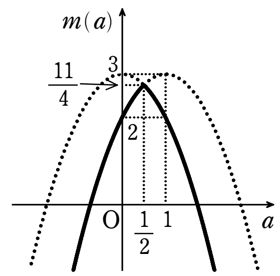
(2) (1) より，$M(a)$ のグラフは [図] の実線部分のようになる。



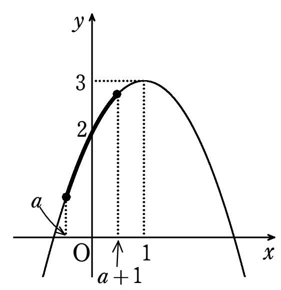
21 関数 $f(x)=-x^2+2x+2$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。$M(a)$ および $m(a)$ を求め，そのグラフをかけ。

解答 $a<0$ のとき $M(a)=-a^2+3$， $0\leqq a\leqq 1$ のとき $M(a)=3$,
$1<a$ のとき $M(a)=-a^2+2a+2$
$a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $m(a)=-a^2+2a+2$， $\frac{1}{2}<a$ のとき $m(a)=-a^2+3$
グラフは [図]





解説
$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。
まず，最大値 $M(a)$ について考える。
[1] $a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき
$f(x)$ は $x=a+1$ で最大となるから
$M(a)=f(a+1)=-a^2+3$
[2] $a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき
$f(x)$ は $x=1$ で最大となるから
$M(a)=f(1)=3$
[3] $1<a$ のとき
$f(x)$ は $x=a$ で最大となるから
$M(a)=f(a)=-a^2+2a+2$



したがって

$$\begin{cases} a<0 \quad \text{のとき} \quad M(a)=-a^2+3 \\ 0\leqq a\leqq 1 \text{ のとき} \quad M(a)=3 \\ 1<a \quad \text{のとき} \quad M(a)=-a^2+2a+2 \end{cases}$$

次に，最小値 $m(a)$ について考える。

定義域の中央の値は　$a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}\leqq 1$ すなわち $a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で最小となるから

$$m(a)=f(a)=-a^2+2a+2$$

[2]　$1<a+\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{1}{2}<a$ のとき

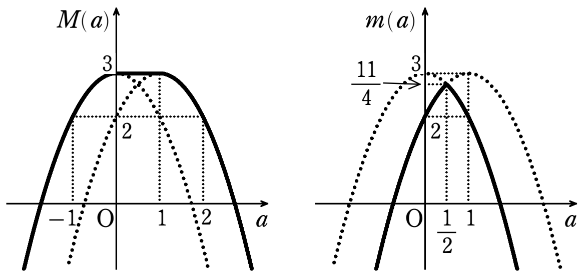
$f(x)$ は $x=a+1$ で最小となるから

$$m(a)=f(a+1)=-a^2+3$$

したがって

$$\begin{cases} a\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき} \quad m(a)=-a^2+2a+2 \\ \dfrac{1}{2}<a \text{ のとき} \quad m(a)=-a^2+3 \end{cases}$$

以上から，求めるグラフは図の実線部分である。



$\boxed{22}$ 関数 $y=x^2-2x+m$ の値が $0\leqq x\leqq 3$ の範囲で常に負となるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<-3$

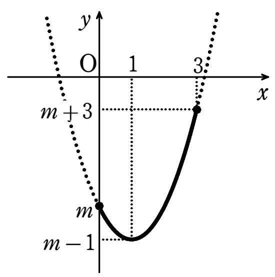
解説

$y=x^2-2x+m=(x-1)^2+m-1$

この関数の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値が負であればよい。

$x=3$ で最大値 $m+3$ をとるから　　$m+3<0$

よって　　$m<-3$



$\boxed{23}$ 周囲の長さが 20 cm である長方形について，次の問いに答えよ。

(1)　この長方形の面積の最大値を求めよ。また，このとき，長方形はどのような形か。

(2)　この長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積の最小値を求めよ。

解答　(1)　25 cm^2，正方形　　(2)　50 cm^2

解説

(1)　長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $\dfrac{20-2x}{2}=10-x$ (cm) である。

また，$x>0$，$10-x>0$ であるから　　$0<x<10$

この長方形の面積を $y\text{ cm}^2$ とすると

$$y=x(10-x)=-(x-5)^2+25$$

$0<x<10$ から，y は $x=5$ で最大値 25 をとる。

よって，長方形の面積の最大値は 25 cm^2 である。

このとき，縦の長さも横の長さも 5 cm になるから，長方形の形は正方形である。

(2)　長方形の対角線の長さを z cm とすると　　$z^2=x^2+(10-x)^2$

よって，正方形の面積を $S\text{ cm}^2$ とすると

$$S=x^2+(10-x)^2=2(x-5)^2+50$$

$0<x<10$ から，S は $x=5$ で最小値 50 をとる。

よって，正方形の面積の最小値は　　50 cm^2

$\boxed{24}$ 点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(4,\ 16)$ の間にある。このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ。

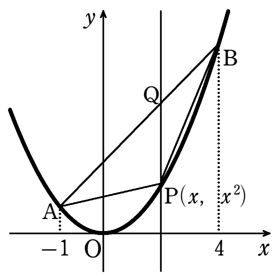
解答　$x=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{125}{8}$

解説

点 P を通り x 軸と垂直な直線と，辺 AB との交点を Q とする。

直線 AB の方程式は $y=3x+4$ であるから，点 Q の座標は　　$(x,\ 3x+4)$

よって　　$\mathrm{PQ}=3x+4-x^2$



したがって，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を y とすると

$$\begin{aligned} y&=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{BPQ} \\ &=\frac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times\{4-(-1)\} \\ &=\frac{1}{2}\times(3x+4-x^2)\times 5=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{8} \end{aligned}$$

また，定義域は $-1<x<4$ である。

よって，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積は $x=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{125}{8}$ をとる。