数学演習（２次関数）Ｈ２２．６．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

２．定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

３．ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

４．2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，3 点 $(-2,\ -2)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -5)$ を通る。a，b，c の値を求めよ。

５．2 次方程式 $x^2+x+k=0$ が実数の解をもつ k の値の範囲は ア $\boxed{}$ である。2 次方程式 $x^2+x+k=0$，$x^2+kx+1=0$ がともに実数の解をもつような k の値の範囲は イ $\boxed{}$，少なくとも一方が実数の解をもつような k の値の範囲は ウ $\boxed{}$ である。

６．k は定数とする。関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を $M(k)$ とする。$M(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めよ。

7．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

8．以下，答えは必ず $y=ax^2+bx+c$ の形で答えること。

(1)　グラフが $x=-\dfrac{1}{2}$ で x 軸に接し，点 $(-2,\ 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

(2)　グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で x 軸と交わり，かつ最大値が 2 である 2 次関数を求めよ。

9．x が $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき

$$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

数学演習（２次関数）Ｈ２２．６．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

$y=x^2-2ax-a$

$=(x-a)^2-a^2-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$

軸の方程式は $x=a$

[1]　$a\leqq 0$ のとき

グラフは[図]の実線部分のようになる。

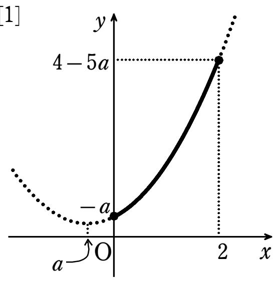
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

条件から　　$-a=-2$

よって　　　$a=2$

これは $a\leqq 0$ を満たさない。

[1]



[2]　$0<a<2$ のとき

グラフは[図]の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-a^2-a$ をとる。

条件から　$-a^2-a=-2$

$a^2+a-2=0$

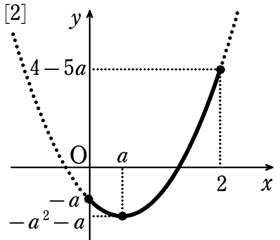
$(a-1)(a+2)=0$

よって　　$a=1,\ -2$

このうち，$0<a<2$ を満たすものは

$a=1$

[2]



[3]　$2\leqq a$ のとき

グラフは[図]の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $4-5a$ をとる。

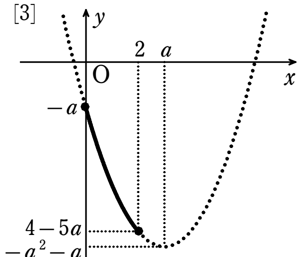
条件から　$4-5a=-2$

よって　　　$a=\dfrac{6}{5}$

これは $2\leqq a$ を満たさない。

以上から　　$a=1$

[3]



2．定義域を $1\leqq x\leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=3,\ b=4$　または　$a=-3,\ b=-8$

解説

$f(x)=a(x^2-4x)+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

$1<2<4$ であり　$f(1)=-3a+b,\ f(2)=-4a+b,$

$f(4)=b$

[1]　$a=0$ のとき

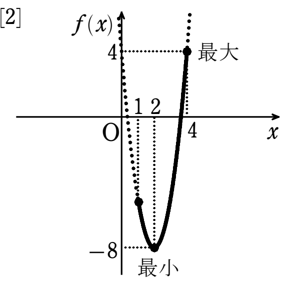
$f(x)=b$（定数）となり，最大値 4，最小値 -8 となることはない。

[2]　$a>0$ のとき

$x=4$ で最大値 b

$x=2$ で最小値 $-4a+b$ をとる。

[2]



ゆえに　　$b=4,\ -4a+b=-8$

これを解いて　　$a=3,\ b=4$

これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

$x=2$ で最大値 $-4a+b$

$x=4$ で最小値 b　　　をとる。

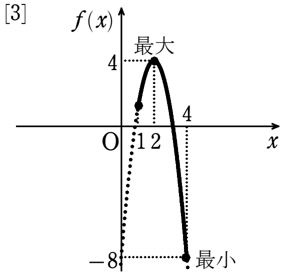
ゆえに　　$-4a+b=4,\ b=-8$

これを解いて　　$a=-3,\ b=-8$

これは $a<0$ を満たす。

よって　　$a=3,\ b=4$　または　$a=-3,\ b=-8$

[3]



3．ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x^2+4x-2$

解説

求める放物線は，放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると

$-y=x^2-2x+2$　　　すなわち　　$y=-x^2+2x-2$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$y-3=-(x-1)^2+2(x-1)-2$

よって　　　　$y=-x^2+4x-2$

4．2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，3 点 $(-2,\ -2)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -5)$ を通る。a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=-1,\ b=2,\ c=-5$

解説

放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$y=a(x+2)^2+b(x+2)+c+3$

このグラフが 3 点 $(-2,\ -2)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -5)$ を通るから

$-2=c+3,\ -1=a+b+c+3,\ -5=9a+3b+c+3$

これを解くと　$a=-1,\ b=2,\ c=-5$

別解　3 点 $(-2,\ -2)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -5)$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ移動すると，それぞれ

$(0,\ -5)$，$(1,\ -4)$，$(3,\ -8)$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフはこの 3 点を通るから

$-5=c,\ -4=a+b+c,\ -8=9a+3b+c$

これを解くと　$a=-1,\ b=2,\ c=-5$

5．2 次方程式 $x^2+x+k=0$ が実数の解をもつ k の値の範囲は ア $\boxed{}$ である。2 次方程式 $x^2+x+k=0$，$x^2+kx+1=0$ がともに実数の解をもつような k の値の範囲は イ $\boxed{}$，少なくとも一方が実数の解をもつような k の値の範囲は ウ $\boxed{}$ である。

解答　（ア）$k\leqq\dfrac{1}{4}$　　（イ）$k\leqq -2$　　（ウ）$k\leqq\dfrac{1}{4},\ 2\leqq k$

解説

（ア）　2 次方程式 $x^2+x+k=0$　……①について

$D_1=1-4k$ とすると，①が実数の解をもつ条件は　　$D_1\geqq 0$

ゆえに，$1-4k\geqq 0$ から　　$k\leqq\dfrac{1}{4}$

（イ）　2 次方程式 $x^2+kx+1=0$　……②について

$D_2=k^2-4$ とすると，①，②がともに実数の解をもつ条件は

$D_1\geqq 0$　かつ　$D_2\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ については，(ア) から　　$k\leqq\dfrac{1}{4}$　……③

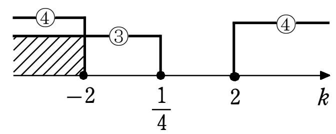
$D_2=k^2-4=(k+2)(k-2)$ で $D_2\geqq 0$ から

$k\leqq -2,\ 2\leqq k$　……④

求める k の値の範囲は，③，④の共通範囲であるから

$k\leqq -2$

（イ）



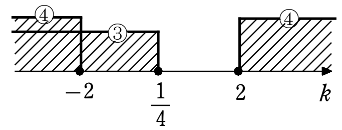
（ウ）　①，②の少なくとも一方が実数の解をもつ条件は

$D_1\geqq 0$　または　$D_2\geqq 0$

したがって，求める k の値の範囲は，③，④を合わせた範囲であるから

$k\leqq\dfrac{1}{4},\ 2\leqq k$

（ウ）



別解　（ウ）　①，②がともに実数の解をもたない条件は

$D_1=1-4k<0$　かつ　$D_2=k^2-4<0$

ゆえに，$k>\dfrac{1}{4}$　かつ　$-2<k<2$　から　　$\dfrac{1}{4}<k<2$　……⑤

よって，⑤の範囲以外，すなわち $k\leqq\dfrac{1}{4}$，$2\leqq k$ ならば，①，②の少なくとも一方は実数の解をもつ。

6．k は定数とする。関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を $M(k)$ とする。$M(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めよ。

解答　最大値 36（$k=3$）

解説

$y=x^2+4kx+24k$

$=(x+2k)^2-4k^2+24k$

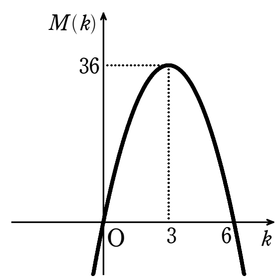
と変形できる。

ゆえに　　$M(k)=-4k^2+24k$

$=-4(k-3)^2+36$

よって，$M(k)$ を最大にする k の値は　　$k=3$

そのときの$M(k)$の値は36



7．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値とそのときの x の値を求め，表にまとめよ。

解答

aの範囲	$a<0$	$0\leqq a<1$	$a=1$	$1<a\leqq 2$	$2<a$
最大値	$14-12a$	$14-12a$	2	2	2
そのときのx	$x=2$	$x=2$	$x=0,2$	$x=0$	$x=0$
最小値	2	$-3a^2+2$	-1	$-3a^2+2$	$14-12a$
そのときのx	$x=0$	$x=a$	$x=1$	$x=a$	$x=2$

解説

$y=3x^2-6ax+2$ を変形すると　$y=3(x-a)^2-3a^2+2$

また　$x=0$ のとき $y=2$，　$x=2$ のとき $y=14-12a$，

$x=a$ のとき $y=-3a^2+2$

(1)　$a<0$ のとき

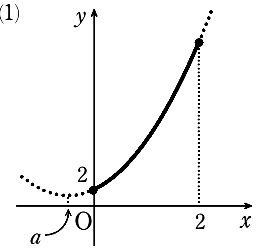
$x=2$ のとき最大値 $14-12a$，　$x=0$ のとき最小値 2

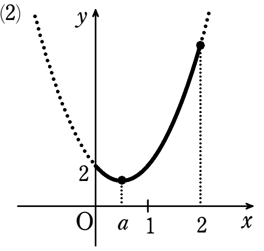
(2)　$0\leqq a<1$ のとき

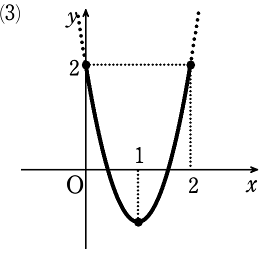
$x=2$ のとき最大値 $14-12a$，　$x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

(3)　$a=1$ のとき

$x=0$，2 のとき最大値 2，　$x=1$ のとき最小値 -1

(1)


(2)


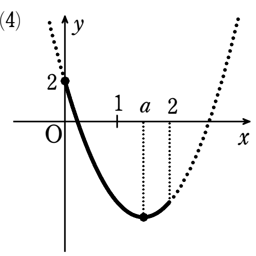
(3)


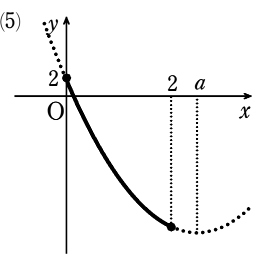
(4)　$1<a\leqq 2$ のとき

$x=0$ のとき最大値 2，　$x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

(5)　$a>2$ のとき

$x=0$ のとき最大値 2，　$x=2$ のとき最小値 $14-12a$

(4)


(5)


8．以下，答えは必ず $y=ax^2+bx+c$ の形で答えること。

(1)　グラフが $x=-\dfrac{1}{2}$ で x 軸に接し，点 $(-2,\ 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

(2)　グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で x 軸と交わり，かつ最大値が 2 である 2 次関数を求めよ。

解答　(1)　$y=4x^2+4x+1$　　(2)　$y=-2x^2+8x-6$

解説

(1)　条件より，頂点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ と表される。

そのグラフが点 $(-2,\ 9)$ を通るから　　$9=a\left(-2+\dfrac{1}{2}\right)^2$

よって　$9=\dfrac{9}{4}a$　　したがって　$a=4$

ゆえに　$y=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$　　すなわち　$y=4x^2+4x+1$

(2)　条件より，求める 2 次関数は $y=a(x-1)(x-3)$ と表される。

これを変形して　$y=a(x^2-4x+3)=a\{(x-2)^2-1\}$

$=a(x-2)^2-a$

よって，そのグラフの頂点は，点 $(2,\ -a)$ である。

この関数の最大値が 2 であるための条件は

$a<0$　かつ　$-a=2$

ゆえに　　$a=-2$　　　　これは $a<0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は

$y=-2(x-1)(x-3)$　　すなわち　$y=-2x^2+8x-6$

別解　2 次関数のグラフは，その軸に関して対称である。グラフと x 軸が 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，軸は直線 $x=\dfrac{1+3}{2}$　すなわち　$x=2$

また，最大値が 2 であるから，求める 2 次関数は $y=a(x-2)^2+2$　$(a<0)$ と表される。

そのグラフが点 $(1,\ 0)$ を通るから　　$0=a(1-2)^2+2$

よって　$0=a+2$　　ゆえに　$a=-2$　　　これは $a<0$ を満たす。

したがって　$y=-2(x-2)^2+2$　　すなわち　$y=-2x^2+8x-6$

9．x が $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき

$$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=-1$ のとき 最大値 1，$x=-1+\sqrt{3}$ のとき 最小値 -8

解説

$x^2+2x=t$ とおくと

$y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5x^2-10x+2$

$=\{(x^2+2x)+3\}\{(x^2+2x)-2\}-5(x^2+2x)+2$

$=(t+3)(t-2)-5t+2=t^2-4t-4$

$=(t-2)^2-8$

すなわち　$y=(t-2)^2-8$ …… ①

また，$-2\leqq x\leqq 1$ のとき　$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

ゆえに，t の値域は　$-1\leqq t\leqq 3$ …… ②

② の t の範囲で，t の関数 y は

$t=-1$ のとき 最大値 1，

$t=2$ のとき最小値 -8　をとる。

$t=-1$ のとき $x^2+2x=-1$ から　$(x+1)^2=0$

ゆえに $-2\leqq x\leqq 1$ から　$x=-1$

$t=2$ のとき $x^2+2x=2$，$-2\leqq x\leqq 1$ から

$x=-1+\sqrt{3}$

以上から　$x=-1$ のとき 最大値 1

$x=-1+\sqrt{3}$ のとき 最小値 -8