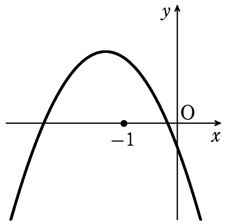
数学演習（２次関数）Ｈ２１．９．３　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図で与えられているとき，次の値の符号を調べよ。

(1) a　(2) b　(3) c

(4) b^2-4ac　(5) $a-b+c$



２. 放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

３. 放物線 $y=2x^2-2x+1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1) x 軸　(2) y 軸　(3) 原点

４. a を定数とするとき $0 \leqq x \leqq 2$ における関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1) 最大値を求めよ。　(2) 最小値を求めよ。

５. 定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

６. a を実数として，$a \leqq x \leqq a+2$ で定義される関数 $f(x)=x^2-2x+3$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。このとき，関数 $M(a)$，$m(a)$ を求めよ。

7．(1)　x，y を変数とするとき，$x^2-4xy+7y^2-4y+3$ の最小値を求め，そのときの x，y の値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ。

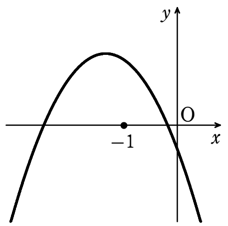
8．$1\leqq x\leqq 5$ のとき，x の関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ の最大値は ア $\boxed{}$，最小値は イ $\boxed{}$ である。

9．$a\geqq 0$ とする。2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+2a+3$ の，$0\leqq x\leqq 4$ における最大値 を $M(a)$，最小値 を $m(a)$ とするとき，$M(a)-m(a)=9$ となるような a の値を求めよ。

１．2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図で与えられているとき，次の値の符号を調べよ。

(1)　a　　(2)　b　　(3)　c

(4)　b^2-4ac　　(5)　$a-b+c$



解答　(1)　$a<0$　　(2)　$b<0$　　(3)　$c<0$　　(4)　$b^2-4ac>0$　　(5)　$a-b+c>0$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

であるから，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の

軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　頂点の y 座標は　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，

y 軸との交点の y 座標は　c

また，$x=-1$ のとき　　$y=a(-1)^2+b(-1)+c=a-b+c$

(1)　グラフが上に凸であることから　　$a<0$

(2)　グラフより，軸が $x<0$ の部分にあるから　　$-\dfrac{b}{2a}<0$

(1) より，$a<0$ であるから　　$b<0$

(3)　グラフは y 軸の負の部分と交わっているから　　$c<0$

(4)　頂点の y 座標が正であるから　　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

(1) より，$a<0$ であるから　　$-(b^2-4ac)<0$　　すなわち　　$b^2-4ac>0$

(5)　$a-b+c$ は，$x=-1$ における y の値であるから，グラフより　　$y>0$

すなわち　　$a-b+c>0$

２．放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2-8x+11$

求める方程式は　　$y-(-1)=(x-2)^2-4(x-2)$

すなわち　　$y+1=x^2-4x+4-4x+8$

ゆえに　　$y=x^2-8x+11$

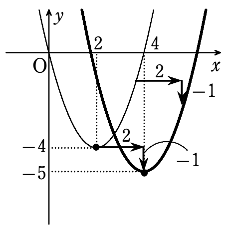
別解　放物線 $y=x^2-4x$　すなわち　$y=(x-2)^2-4$

の頂点 $(2,\ -4)$ を平行移動すると　$(2+2,\ -4-1)$

すなわち　$(4,\ -5)$ となるから，移動後の放物線の

方程式は　　$y=(x-4)^2-5$

よって　　$y=x^2-8x+11$



３．放物線 $y=2x^2-2x+1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

解答　(1)　$y=-2x^2+2x-1$　　(2)　$y=2x^2+2x+1$　　(3)　$y=-2x^2-2x-1$

(1)　$y=-(2x^2-2x+1)$

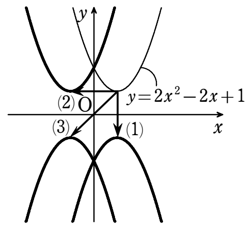
すなわち　　$y=-2x^2+2x-1$

(2)　$y=2(-x)^2-2(-x)+1$

すなわち　　$y=2x^2+2x+1$

(3)　$y=-\{2(-x)^2-2(-x)+1\}$

すなわち　　$y=-2x^2-2x-1$



４．a を定数とするとき $0\leqq x\leqq 2$ における関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<1$ のとき　$x=2$　　で最大値 $2a^2-4a+4$；

$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 2；

$1<a$ のとき　$x=0$　　で最大値 $2a^2$

(2)　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $2a^2$，

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2，

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

$y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$　$(0\leqq x\leqq 2)$

ゆえに，この関数のグラフは頂点が点 $(a,\ a^2)$，軸が直線 $x=a$ で，下に凸の放物線の一部である。

$x=0$ のとき　$y=2a^2$

$x=2$ のとき　$y=2a^2-4a+4$

$x=a$ のとき　$y=a^2$

定義域の中央は $x=1$ であるから，図より

(1)　$a<1$ のとき　$x=2$　で 最大値 $2a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で 最大値 2

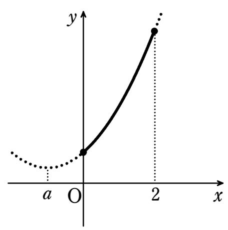
$1<a$ のとき　$x=0$　で 最大値 $2a^2$

(2)　$a<0$ のとき　　$x=0$ で 最小値 $2a^2$

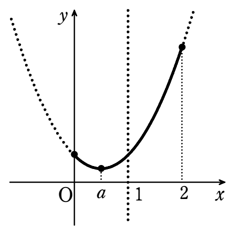
$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で 最小値 a^2

$2<a$ のとき　　$x=2$ で 最小値 $2a^2-4a+4$

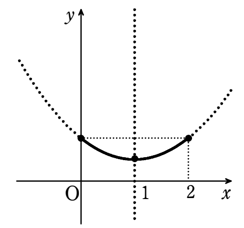
$a<0$ のとき



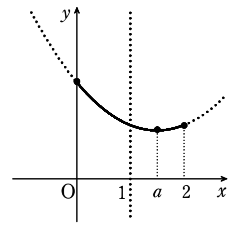
$0\leqq a<1$ のとき



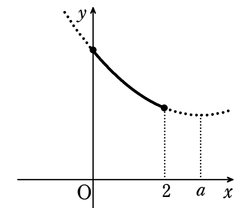
$a=1$ のとき



$1<a\leqq 2$ のとき



$2<a$ のとき



５．定義域を $1\leqq x\leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -8 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=3,\ b=4$　または　$a=-3,\ b=-8$

$f(x)=a(x^2-4x)+b$

$\quad=a(x-2)^2-4a+b$

$1<2<4$ であり　$f(1)=-3a+b$，$f(2)=-4a+b$，

$f(4)=b$

[1]　$a=0$ のとき

$f(x)=b$ (定数) となり，最大値 4，最小値 -8 となることはない。

[2]　$a>0$ のとき

$x=4$ で最大値 b

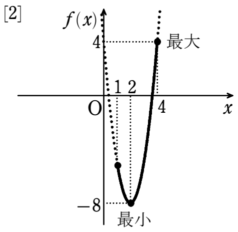
$x=2$ で最小値 $-4a+b$ をとる。

ゆえに　　$b=4$，$-4a+b=-8$

これを解いて　　$a=3$，$b=4$

これは $a>0$ を満たす。

[2]



[3]　$a<0$ のとき

$x=2$ で最大値 $-4a+b$

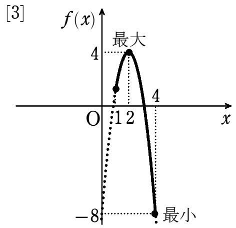
$x=4$ で最小値 b　　　をとる。

ゆえに　　$-4a+b=4$，$b=-8$

これを解いて　　$a=-3$，$b=-8$

これは $a<0$ を満たす。

[3]



よって　　$a=3$，$b=4$　または　$a=-3$，$b=-8$

６．a を実数として，$a\leqq x\leqq a+2$ で定義される関数 $f(x)=x^2-2x+3$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。このとき，関数 $M(a)$，$m(a)$ を求めよ。

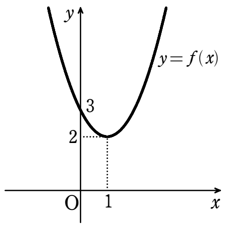
解答　$a<0$ のとき $M(a)=a^2-2a+3$，$0\leqq a$ のとき $M(a)=a^2+2a+3$；

$a<-1$ のとき $m(a)=a^2+2a+3$，$-1\leqq a\leqq 1$ のとき $m(a)=2$，

$1<a$ のとき $m(a)=a^2-2a+3$

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。



$M(a)$ について

$f(a)=a^2-2a+3$

$f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)+3$

$=a^2+2a+3$

$f(a)=f(a+2)$ とすると

$a^2-2a+3=a^2+2a+3$

これを解くと　$a=0$

よって，求める $M(a)$ は，下の図から

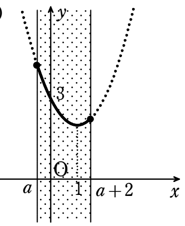
$a<0$ のとき，$x=a$ で最大となり

$M(a)=f(a)=a^2-2a+3$

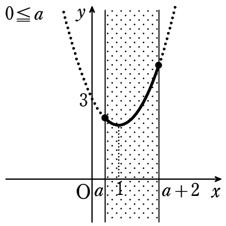
$0\leqq a$ のとき，$x=a+2$ で最大となり

$M(a)=f(a+2)=a^2+2a+3$

$a<0$



$0\leqq a$



$m(a)$ について

放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=1$ であるから，次の図より

[1]　$a+2<1$　すなわち　$a<-1$ のとき，$x=a+2$ で最小となり

$m(a)=f(a+2)=a^2+2a+3$

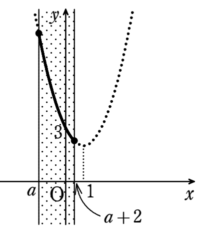
[2]　$a\leqq1\leqq a+2$　すなわち　$-1\leqq a\leqq1$ のとき，$x=1$ で最小となり

$m(a)=f(1)=2$

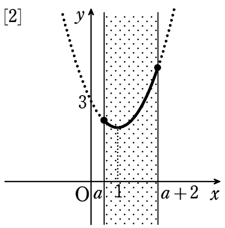
[3]　$1<a$ のとき，$x=a$ で最小となり

$m(a)=f(a)=a^2-2a+3$

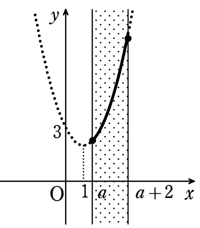
[1]



[2]



[3]



7．(1)　x，y を変数とするとき，$x^2-4xy+7y^2-4y+3$ の最小値を求め，そのときの x，y の値を求めよ。

(2)　$x\geqq0$，$y\geqq0$，$2x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ で最小値 $\dfrac{5}{3}$

(2)　$(x,\ y)=(2,\ 4)$ のとき 最大値 8；$(x,\ y)=(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ のとき 最小値 0

(1)　$x^2-4xy+7y^2-4y+3=\{x^2-4yx+(2y)^2\}-(2y)^2+7y^2-4y+3$

$=(x-2y)^2+3y^2-4y+3$

$=(x-2y)^2+3\left\{y^2-\dfrac{4}{3}y+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+3$

$=(x-2y)^2+3\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}$

したがって，$x-2y=0$，$y-\dfrac{2}{3}=0$，すなわち $x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ で最小値 $\dfrac{5}{3}$ をとる。

(2)　$2x+y=8$ から　$y=-2x+8$　　ゆえに

$xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x$

$=-2(x^2-4x+2^2)+2\cdot2^2$

$=-2(x-2)^2+8$

$x\geqq0$，$y=-2x+8\geqq0$ であるから　$0\leqq x\leqq4$

よって，$x=2$ で 最大値 8 をとり，$x=0$，4 で 最小値 0 をとる。

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 4)$ のとき 最大値 8

$(x,\ y)=(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ のとき 最小値 0

8．$1\leqq x\leqq5$ のとき，x の関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　3　　(イ)　-6

$x^2-6x=t$ とおくと，関数は

$y=t^2+12t+30$　……①

で表される。また，$1\leqq x\leqq5$ のとき

$t=x^2-6x=(x-3)^2-9$

から，x の関数 t のグラフは図 [1] の実線部分で，t の変域は

$-9\leqq t\leqq-5$　……②

よって，② における ① の最大値，最小値を求める。

① を変形すると

$y=(t+6)^2-6$

ゆえに，② における t の関数 y のグラフは図 [2] の実線部分である。

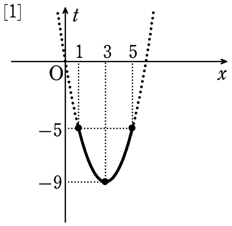
したがって，y は

$t=-9$ のとき　$x=3$ で　最大値 ${}^{ア}3$

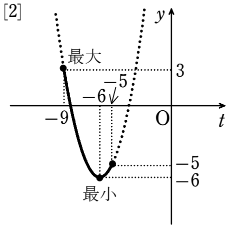
$t=-6$ のとき　$x=3\pm\sqrt{3}$ で　最小値 ${}^{イ}-6$

をとる。

[1]



[2]



9．$a\geqq0$ とする。2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+2a+3$ の，$0\leqq x\leqq4$ における最大値 を$M(a)$，最小値 を $m(a)$ とするとき，$M(a)-m(a)=9$ となるような a の値を求めよ。

解答　$a=1,3$

$f(x)=x^2-2ax+2a+3$

$=(x-a)^2-a^2+2a+3$

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフは

軸が直線 $x=a$,

頂点が点 $(a,\ -a^2+2a+3)$,

下に凸の放物線

であるから，$0\leqq x\leqq4$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ は，右の図から次のようになる。

[1]　$0\leqq a<2$ のとき

$M(a)=f(4)=4^2-2a\cdot4+2a+3$

$=-6a+19$

$m(a)=f(a)=-a^2+2a+3$

よって

$M(a)-m(a)=(-6a+19)-(-a^2+2a+3)$

$=a^2-8a+16$

ゆえに $M(a)-m(a)=9$ となるのは

$a^2-8a+16=9$

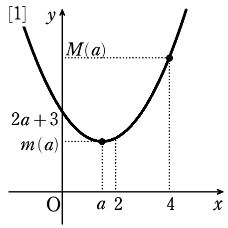
$a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$a=1,7$

$0\leqq a<2$ より　$a=1$

[1]



[2]　$2\leqq a<4$ のとき

$M(a)=f(0)=2a+3$

$m(a)=f(a)=-a^2+2a+3$

よって

$M(a)-m(a)=(2a+3)-(-a^2+2a+3)$

$=a^2$

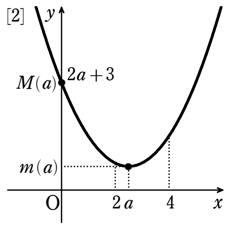
ゆえに $M(a)-m(a)=9$ となるのは

$a^2=9$

$a=\pm3$

$2\leqq a<4$ より　$a=3$

[2]



[3]　$4\leqq a$ のとき

$M(a)=f(0)=2a+3$

$m(a)=f(4)=-6a+19$

よって

$M(a)-m(a)=(2a+3)-(-6a+19)$

$=8a-16$

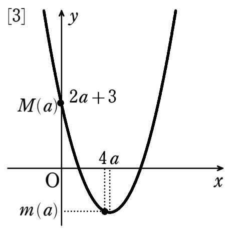
ゆえに $M(a)-m(a)=9$ となるのは

$8a-16=9$

$8a=25$　より　$a=\dfrac{25}{8}$

しかしここで，$a\geqq4$ より，$a=\dfrac{25}{8}$ は不適

[3]



[1]～[3] から　$a=1,3$